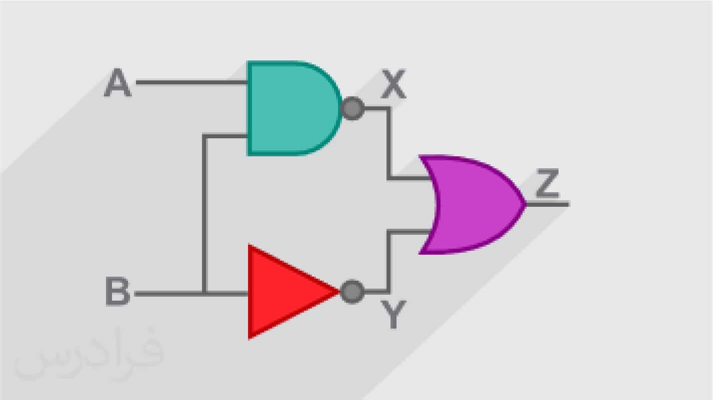


فصل اول

مبناهای عددی

سرفصل مطالب

- مبناهای عددی
- تبدیل مبنا
- نمایش های مختلف اعداد منفی
- اعمال حسابی در مبناهای مختلف
- کدهای دودویی

مبنای ۱۰

- در مبنای ۱۰، ارقام مجاز برای ساختن اعداد، ارقام از صفر تا ۹ هستند.

- در مبنای r ارقام مجاز برای ساختن اعداد، ارقام از صفر تا r-1 هستند و همه اعداد باید با استفاده از همین ارقام ساخته شوند

برخی مبناهای متداول:

مبنای ۲ : ارقام از صفر تا ۱ وجود دارد

مبنای ۴ : ارقام از صفر تا ۳ وجود دارد

مبنای ۸ : ارقام از صفر تا ۷ وجود دارد

مبنای ۱۶:

ارقام: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

سایر مبناهای عددی

برخی از مبناها نام های دیگری نیز دارند که باید آنها را به خاطر بسپاریم.

- نام دیگر مبنای ۲، Binary و دودویی است.
- نام دیگر مبنای ۸، octal یا به اختصار oct است.
- نام دیگر مبنای ۱۶، Hexadecimal یا به اختصار Hex است.
- نام دیگر مبنای ۱۰، Decimal یا دهدهی یا به اختصار Dec است.

تغییر مبنای اعداد

- چگونگی پیدا کردن نمایش یک عدد در مبنای ۱۰: اعداد باید به صورت مجموعی ازمضارب 10^r نوشته شوند

$$491 = 4\times10^2 + 9\times10^1 + 1\times10^0$$

$$0.32 = 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

$$491.32 = 4\times10^2 + 9\times10^1 + 1\times10^0 + 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

- چگونگی پیدا کردن نمایش یک عدد در مبنای ۲: اعداد باید به صورت مجموعی ازمضارب 2^r نوشته شوند.

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = (1111)_2$$

تغییر مبناهای عددی

مبنای ۱۰	مبنای ۸	مبنای ۲	مبنای ۱۶	مبنای ۳	مبنای ۹	مبنای ۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱۰	۲	۲	۲	۲
۳	۳	۱۱	۳	۱۰	۳	۳
۴	۴	۱۰۰	۴	۱۱	۴	۱۰
۵	۵	۱۰۱	۵	۱۲	۵	۱۱
۶	۶	۱۱۰	۶	۲۰	۶	۱۲
۷	۷	۱۱۱	۷	۲۱	۷	۱۳
۸	۱۰	۱۰۰۰	۸	۲۲	۸	۲۰
۹	۱۱	۱۰۰۱	۹	۱۰۰	۱۰	۲۱
۱۰	۱۲	۱۰۱۰	A	۱۰۱	۱۱	۲۲
۱۱	۱۳	۱۰۱۱	B	۱۰۲	۱۲	۲۳
۱۲	۱۴	۱۱۰۰	C	۱۱۰	۱۳	۳۰
۱۳	۱۵	۱۱۰۱	D	۱۱۱	۱۴	۳۱
۱۴	۱۶	۱۱۱۰	E	۱۱۲	۱۵	۳۲
۱۵	۱۷	۱۱۱۱	F	۱۲۰	۱۶	۳۳
۱۶	۲۰		۱۰	۱۲۱	۱۷	۱۰۰
۱۷	۲۱		۱۱	۱۲۲	۱۸	۱۰۱
۱۸	۲۲		۱۲		۲۰	۱۰۲
۱۹	۲۳		۱۳		۲۱	۱۰۳
۲۰	۲۴		۱۴		۲۲	۱۱۰

تغییر مبنای اعداد

- توجه: با تغییر مبنای عدد، ماهیت آن عوض نمی شود بلکه فقط شکل نشان دادن آن تغییر می کند.

$$a = (a_n \ldots a_2\, a_1\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-m})_r$$

- مبنای ۲ (binary)
- مبنای ۱۰ (decimal)
- مبنای ۸ (octal)
- مبنای ۱۶ (hexadecimal) : شامل ارقام ۰ تا ۹ و a، b، c، d، e، f

تبدیل از مبنای r به مبنای ۱۰

تبدیل از مبناهای غیر۱۰ به مبنای ۱۰ : برای تبدیل یک عدد از مبنای غیرده به مبنای ۱۰ ، ابتدا آن عدد را ارزش گذاری کرده و سپس از خاصیت ضرب استفاده می‌کنیم.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_r$$

$$\sum_{i=-m}^{n} a_i (r)^i$$

$$(110.01)_2 = (1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 \,.\, 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2})_{10}$$

مثال هایی از تبدیل مبنای r به ۱۰

$$(4021.2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (511.4)_{10}$$

$$(127.4)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = (87.5)_{10}$$

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (46{,}687)_{10}$$

$$(110101)_2 = 32 + 16 + 4 + 1 = (53)_{10}$$

تمرین

در تساوی زیر مقدار A برابر کدام است؟

$(11011/0101)_2 = (A)_{10}$

(دکترا _ ۹۳)

$A = ۲۷/۳۱$

تعریف کیلو / مگا / گیگا / ترا بیت:

در کارهای کامپیوتری 2^{10} را K (کیلو)، 2^{20} را M (مگا)، 2^{30} را G (گیگا) و 2^{40} را T (ترا) می‌گویند. بنابراین $4K = 2^{12} = 4096$ و $16M = 2^{24} = 16777216$ می‌باشد. معمولاً ظرفیت کامپیوتر به بایت داده می‌شود. یک بایت برابر با هشت بیت بوده و می‌تواند یک کاراکتر از صفحه کلید را در خود جای دهد. یک دیسک سخت (هارد) کامپیوتر با ظرفیت 4 گیگا دارای ظرفیت $4G = 2^{32}$ بایت می‌باشد.

تبدیل از مبنای ۱۰ به r (روش تقسیمات متوالی)

- قسمت صحیح عدد را متوالیا به r تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در r ضرب می کنیم.
- مزیت روش تقسیمات متوالی بر مبنا، سادگی پیاده سازی کامپیوتری آن است.
- تقسیم های متوالی را تا جایی ادامه می دهیم که حاصل تقسیم صفر شود
- باقیمانده ها را از پایین به بالا می نویسیم

$$(301.2)_{10} = (455.1463....)_8$$

قسمت صحیح

$$301 \div 8 = 37,\quad 301 - 296 = 5$$

$$37 \div 8 = 4,\quad 37 - 32 = 5$$

$$4 \div 8 = 0,\quad 4 - 0 = 4$$

قسمت اعشاری

$$0.2 \times 8 = 1.6$$

$$0.6 \times 8 = 4.8$$

$$0.8 \times 8 = 6.4$$

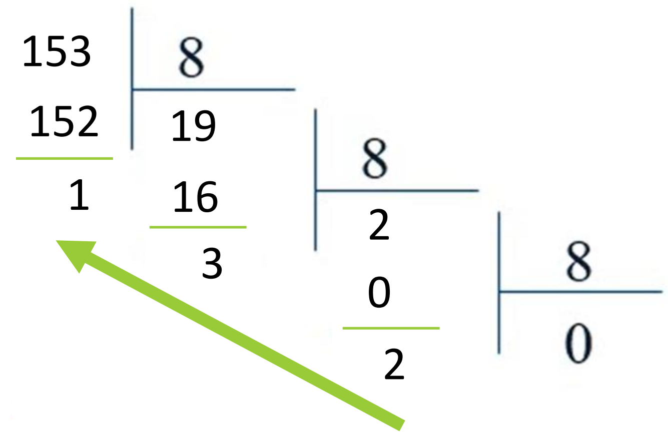
$$0.4 \times 8 = 3.2$$

$0.2 \times 8 =$ تکراری

- ضرب های متوالی را ادامه می دهیم. هرگاه حاصل ضرب بزرگتر از یک شد قسمت صحیح آن را استخراج می کنیم و قیمت اعشاری آن را مجددا ضرب می کنیم

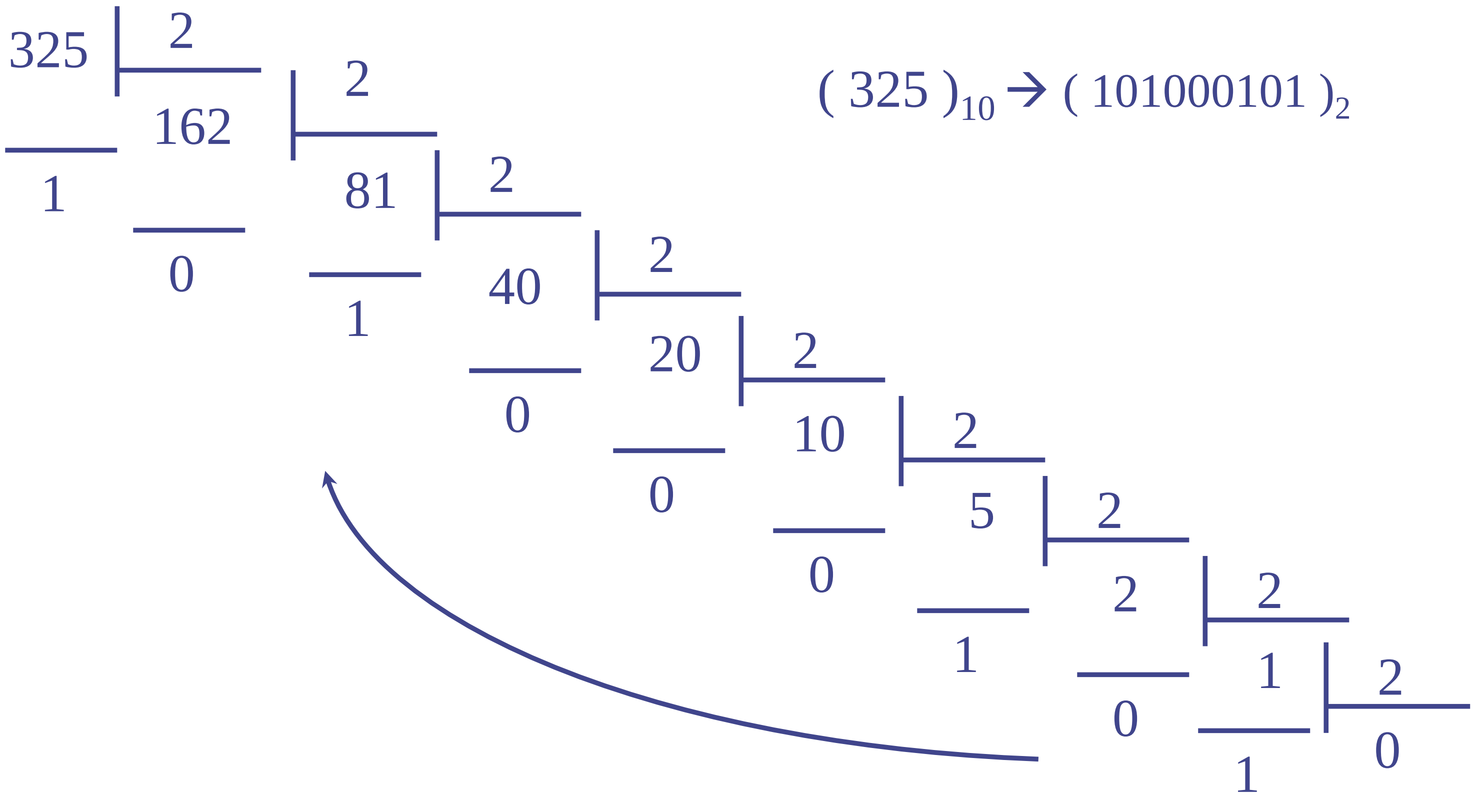
مثال

عدد 153 را به مبنای 8 ببرید



جواب: $(231)_8$

مثال



$(325)_{10} \rightarrow (101000101)_2$

مثال

عدد $(0.6875)_{10}$ را به مبنای 2 تبدیل کنید.

	صحیح		کسری	ضریب
$0.6875 \times 2 =$	1	+	0.3750	$a_{-1} = 1$
$0.3750 \times 2 =$	0	+	0.7500	$a_{-2} = 0$
$0.7500 \times 2 =$	1	+	0.5000	$a_{-3} = 1$
$0.5000 \times 2 =$	1	+	0.0000	$a_{-4} = 1$

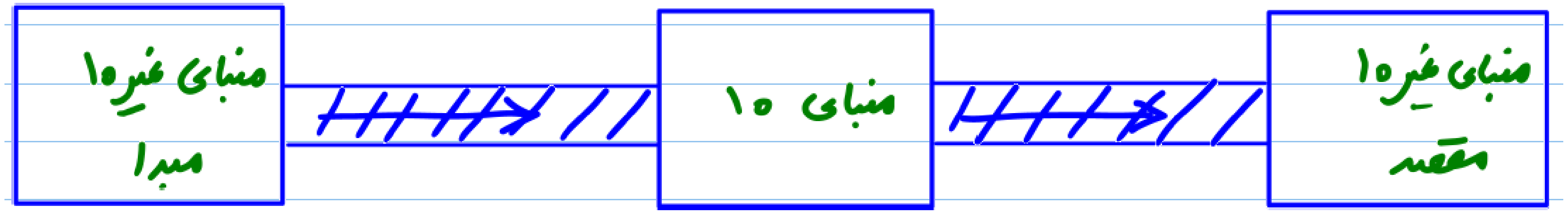
تمرین:

$(0.513)_{10}$ را به مبنای 8 ببرید.

$(۱۰۹/۱۴)_{۱۰} = (\quad\quad)_{۱۳}$

تبدیل از یک مبنای غیر ۱۰ به یک مبنای غیر ۱۰ دیگر

تبدیل از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ دیگر: مبنای ۱۰ مانند یک پل ارتباطی است به این صورت که برای تبدیل یک عدد در مبنای غیر ده به مبنای غیر ۱۰ دیگر ما باید از روی این پل عبور کنیم (البته موارد خاصی نیز وجود دارد که می‌توان مستقیماً تبدیل را انجام داد) یعنی نخست باید از مبنای غیر ۱۰ مبدا به مبنای ۱۰ و سپس به مبنای غیر ۱۰ مقصد برویم.



تبدیل از یک مبنای غیر ۱۰ به یک مبنای غیر ۱۰ دیگر

مثال:

$$(231.3)_4 = (\quad\quad\quad)_7$$

۱– ابتدا تبدیل به مبنای ۱۰

$$(\overset{2}{2}\overset{1}{3}\overset{0}{1}.\overset{-1}{3})_4 = (45.75)_{10}$$

۲– تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای ۷ با تقسیم و ضرب متوالی

$$(45.75)_{10} = (63.5151)_7$$

$$45 \div 7 = 6, \quad 45 - 42 = 3$$

$$0.75 \times 7 = 5.25$$

$$0.25 \times 7 = 1.75$$

تکرار

تمرین

$$(۵۱۲٫۴۱)_{۸} = (\qquad\qquad)_{۶}$$

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای r (روش افزودن وزن ها)

- بیشتر برای تبدیل اعداد دهدهی به اعداد دودویی کاربرد دارد.
- توان های صعودی ۲ را تا مقدار بزرگتر از عدد می نویسیم. با قرار دادن ۱ در زیر بزرگترین وزنی که مساوی یا کوچکتر از عدد دهدهی است شروع می کنیم. سپس آن وزن را از عدد کم می کنیم، این روال به همین ترتیب برای دیگر وزن ها تکرار می شود.

$(43)_{10} = (?)_2$

$43 - 32 = 11$

$11 - 8 = 3$

$3 - 2 = 1$

64	32	16	8	4	2	1
	1	0	1	0	1	1

تغییر مبنای مستقیم

هر عدد در سیستم دودویی : ۱ بیت   هر ۸ بیت: یک بایت

نکته بسیار مهم در مورد مبنای دودویی یا Binary: اگر n تعداد بیت های ما باشد، با n بیت می توان ۲^n عدد یا حالت را به وجود آورد

- با یک بیت می توان $۲ = ۲^۱$ عدد یا حالت را به وجود آورد   ۱ و ۰
- با دو بیت می توان $۴ = ۲^۲$ عدد یا حالت را به وجود آورد   ۱۱ و ۱۰ و ۰۱ و ۰۰
  ۳ و ۲ و ۱ و ۰
- با سه بیت می توان $۸ = ۲^۳$ عدد یا حالت را به وجود آورد
  ۰۰۰ و ۰۰۱ و ۰۱۰ و . . . . ۱۱۰ و ۱۱۱
  ۰ و ۱ و ۲ و . . . ۶ و ۷

تغییر مبنای مستقیم از مبنای ۲ به ۸ و ۱۶

تبدیل از دودویی به هشتایی به سادگی با تفکیک عدد دودویی به گروه‌های سه رقمی در دو طرف نقطه دودویی بدست می‌آید. سپس به هر گروه یک رقم مبنای هشت تعلق می‌گیرد. مثال زیر روال مربوطه را نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{ccccccccccl}(10 & 110 & 001 & 101 & 011 & \cdot & 111 & 100 & 000 & 110)_2 & = (26153.7406)_8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & & 7 & 4 & 0 & 6 & \end{array}$$

تبدیل از مبنای دو به مبنای شانزده نیز مشابه با روند فوق است، با این تفاوت که عدد دودویی به گروه‌های چهار رقمی تفکیک می‌شوند:

$$\begin{array}{cccccccl}(10 & 1100 & 0110 & 1011 & \cdot & 1111 & 0010)_2 & = (2C6B.F2)_{16} \\ 2 & C & 6 & B & & F & 2 & \end{array}$$

۴۲۱

(۰۰۱۰۱۱۰۱۰/۱۱۱۰۱۰)۲ = (۱۳۲/۷۲)۸

تغییر مبنای مستقیم از مبنای ۸ و ۱۶ به ۲

تبدیل از مبنای هشت یا شانزده به دودویی با روشی عکس روش بالا انجام می‌گردد.

$$(673.124)_8 = (\underbrace{110}_{6}\quad \underbrace{111}_{7}\quad \underbrace{011}_{3}\ \cdot\ \underbrace{001}_{1}\quad \underbrace{010}_{2}\quad \underbrace{100}_{4})_2$$

$$(306.D)_{16} = (\ 0011\quad 0000\quad 0110\ \cdot\ 1101\ )_2$$

$$(۴۵۷/۶۳)_۸ = (\underbrace{۱۰۰}_{۴}\ \underbrace{۱۰۱}_{۵}\ \underbrace{۱۱۱}_{۷} / \underbrace{۱۱۰}_{۶}\ \underbrace{۰۱۱}_{۳})_۲$$

$$(F4E/8C)_{۱۶} = (\underbrace{۱۱۱۱}_{F}\ \underbrace{۰۱۰۰}_{۴}\ \underbrace{۱۱۱۰}_{E} / \underbrace{۱۰۰۰}_{۸}\ \underbrace{۱۱۰۰}_{C})_۲$$

تبدیل عدد از مبنای r^n به r و برعکس

- **تبدیل از مبنای r^n به r**

به ازای هر رقم، n رقم در مبنای r قرار می دهیم.

$$(257)_8 = (\ 010\ 101\ 111\ )_2$$

- **تبدیل از مبنای r به r^n**

قسمت صحیح را از سمت راست و قسمت اعشاری را از سمت چپ به صورت دسته های n رقمی جدا می کنیم، و معادل هر دسته را در مبنای می نویسیم.

$$(10101111)_2 = (2\ 5\ 7)_8 \qquad (0.101111)_2 = (\ 0.5\ 7)_8$$

تست

مقدار اعداد نمایش داده شده در کدام مبنا با سایر موارد زیر متفاوت است؟

(ارشد کامپیوتر - دولتی ۹۴)

۱) $(19/1)_{16}$

۲) $(25/0625)_{10}$

۳) $(31/01)_8$ ✓

۴) $(11001/0001)_2$

$$(011001/000100)_2 = (31/04)_8$$

$$(00011001/0001)_2 = (19/1)_{16}$$

تست

درمعادله‌ی $(۲۱۱)_۷ = (۱۵۲)_a$ مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ✓

۲) ۷

۳) ۵

۴) ۹

(کاردانی به کارشناسی ـ دولتی ۸۹)

$$(\overset{۲}{۱}\overset{۱}{۵}\overset{۰}{۲})_a = (\qquad)_{۱۰}$$

$$(\overset{۲}{۲}\overset{۱}{۱}\overset{۰}{۱})_۷ = (\quad ۱۰۶ \quad)_{۱۰}$$

$$۲ \times ۴۹ + \underbrace{۷ + ۱}_{۸}$$

$$۹۸ \xrightarrow{+۸} ۱۰۶$$

$$a^۲ + ۵a + ۲ = ۱۰۶$$

$$a^۲ + ۵a - ۱۰۴ = ۰$$

$$a = ۸ \checkmark$$

$$a = -۱۳$$

متمم ها (Complement)

متمم‌ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می‌روند. ساده‌سازی عملیات منجر به پیاده‌سازی مدارات ساده‌تر می‌گردد. در هر مبنایی چون r ، دو نوع متمم وجود دارد: یکی متمم مبنا و دیگری متمم مبنای کاهش یافته. فرم اول به نام متمم r و دومی به متمم $r-1$ موسوم است. وقتی که مقدار مبنا (یا پایه) را جایگزین کنیم، برای اعداد دودویی، متمم‌های 2 و 1 و برای اعداد دهدهی، متمم‌های 10 و 9 را خواهیم داشت.

متمم اعداد

دو نوع متمم برای هر عدد در مبنای r وجود دارد:

- متمم مبنا یا مکمل r
- متمم در مبنای کاهش یافته یا مکمل r-1

اگر عدد N در مبنای r شامل n رقم باشد:

- متمم مبنا = $r^n – N$
- متمم در مبنای کاهش یافته = $(r^n – 1) – N$

محاسبه متمم مبنای کاهش یافته بسیار ساده تر است، اما در محاسبات متمم مبنا کاربرد دارد

- متمم مبنا = متمم مبنای کاهش یافته + ۱

متمم اعداد (مثال)

N=546700, r=10, n=6

متمم 10 عدد 546700 برابر است با

$$10^6 - 546700 = 1000000 - 546700 = 453300$$

N=546700, r=10, n=6

متمم 9 عدد 546700 برابر است با

$$(10^6 - 1) - 546700 = 999999 - 546700 = 453299$$

روش دیگر محاسبه متمم 10 عدد 546700 استفاده از متمم 9 است

$$453299 + 1 = 453300$$

متمم اعداد (مثال)

متمم 2 عدد 1101100 برابر است با

$$2^7 - 1101100 = (10000000 - 1101100)_2 = 0010100$$

متمم 1 عدد 1101100 برابر است با

$$(2^7 - 1) - 1101100 = (1111111 - 1101100)_2 = 0010011$$

روش دیگر محاسبه متمم 2 عدد 1101100 استفاده از متمم 1 است

$$0010011 + 1 = 0010100$$

مکمل کاهش یافته (r-1) در مبنای r

برای یافتن مکمل کاهش یافته عدد a (در مبنای r)، همه ارقام عدد a را از r-1 کم می کنیم.

$a = (256.73)_{10}$ ← مکمل r-1 → [743.26]

مکمل کاهش یافته (مکمل یک) در مبنای ۲

- برای یافتن مکمل ۱ عدد a در مبنای ۲، همه بیت ها را عوض می کنیم.

$a = (10101)_2$ ← مکمل ۱ → [01010]

توجه: مکمل مکملِ عدد برابر خود عدد خواهد بود.

متمم اعداد در مبنای ۲ (روش سریع)

متمم ۱ : تمام ارقام بامعنی عدد NOT می شود
متمم ۲ : تمام رقم های صفر سمت راست صفر باقی می ماند. اولین رقم ۱ بعد از صفرها نیز تغییر نمی کند و بقیه ارقام NOT می شوند.

NOT شدن: جایگزینی ۱ ها با صفرها و صفرها با ۱ ها

متمم 1 عدد 1101100 برابر است با
0010011

متمم 2 عدد 1101100 برابر است با
0010100

اعداد علامت دار

در حالت طبیعی سیستم اعداد انتخاب شده برای نمایش اعداد باید بتواند هم اعداد بدون علامت و هم اعداد علامت دار را نمایش دهد.

سه روش زیر برای نمایش اعداد علامت دار وجود دارد:

- نمایش بصورت مقدار علامت. سمت چپ ترین بیت نشان دهنده علامت است
- نمایش بصورت مکمل یک.
- نمایش بصورت مکمل دو.

در محاسبه مکمل یک عدد، تعداد بیت های در نظر گرفته شده اهمیت دارد.

اعداد علامت دار

روش مقدار علامت :

بیت علامت صفر نشان دهنده عدد مثبت و بیت علامت یک نشان دهنده عدد منفی است

روش مکمل یک:

از عدد مثبت مکمل یک می گیریم

روش مکمل دو:

از عدد مثبت مکمل دو می گیریم.

- نکته: همه اعداد منفی دارای ۱ در سمت چپ ترین بیت اند.
- امروزه عملا فقط از روش متمم دو استفاده می شود.

اعداد علامت دار (مثال)

اعداد 9+ و 9- را به صورت یک عدد باینری مبنای ۲ با استفاده از ۳روش فوق و با استفاده از ۸ بیت نمایش دهید:

تنها یک روش برای نمایش عدد 9+ وجود دارد:

۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱

برای عدد 9- سه روش نمایش وجود دارد:

روش علامت اندازه:

۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱

روش مکمل یک:

۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰

روش مکمل دو:

۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱

نمایش اعداد دودویی علامت دار

مکمل ۲	مکمل ۱	علامت و مقدار
0011 = +3	0011 = +3	0011 = +3
0010 = +2	0010 = +2	0010 = +2
0001 = +1	0001 = +1	0001 = +1
0000 = +0	0000 = +0	0000 = +0
-	1111 = -0	1000 = -0
1111 = -1	1110 = -1	1001 = -1
1110 = -2	1101 = -2	1010 = -2
1101 = -3	1100 = -3	1011 = -3

- کلیه نمایش های یک عدد مثبت یکسان می باشد
- نمایش های مختلف یک عدد منفی متفاوت می باشد

مثال

نکته بسیار مهم: زمانی مجاز به ارزش گذاری یک عدد دودویی هستیم که آن عدد مثبت باشد زیرا فقط در این صورت است که

تک تک بیت ها حاوی مقدار هستند

اگر سیستم عدد ذکر نشود، باید سیستم بی علامت را در نظر بگیرید

مثال: عدد ۸ بیتی $(10010100)_2$ را به مبنای دهدهی تبدیل کنید با فرض اینکه:

الف) این عدد در سیستم بی علامت باشد. ب) این عدد در سیستم علامت مقدار باشد.

ج) این عدد در سیستم مکمل ۱ باشد. د) این عدد در سیستم مکمل ۲ باشد.

الف) $(10010100)_2 = 148$

$\begin{array}{r} 128 \\ +\ 20 \\ \hline 148 \end{array}$

ب) $(10010100)_2 = -(0010100) = -20$

ج) $(10010100)_2 = -(01101011) = -107$

01101011

$\begin{array}{r} 96 \\ 11 \\ \hline 107 \end{array}$

د) $(10010100)_2 = -(01101100) = -108$

01101100

تمرین

عدد ۸ بیتی $(01000101)_2$ را به مبنای دهدهی تبدیل کنید با فرض اینکه:

الف) این عدد در سیستم بی علامت باشد.
ب) این عدد در سیستم علامت مقدار باشد.

ج) این عدد در سیستم مکمل ۱ باشد.
د) این عدد در سیستم مکمل ۲ باشد.

عملیات روی اعداد بدون علامت در مبناهای مختلف

محاسبات در مبناهای مختلف: انسان برای شمارش و انجام عملیات ریاضی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) از مبنای ۱۰ استفاده می‌کند دلیل این انتخاب توسط انسان تعداد انگشتان دست او بود. جدول ضرب براساس مبنای ۱۰ نوشته شده است. اگر ما ۸ انگشت داشتیم مجبور بودیم از مبنای ۸ استفاده کنیم در این صورت ۴۲ ≠ ۶×۷ و ۸ ≠ ۱+۷ و ۷ ≠ ۵-۱۲. پس درمی‌یابیم که محاسبات در مبناهای غیره۱۰ برای ما بسیار سخت است زیرا ما حتی عملیات ساده‌ی مبناهای غیر۱۰ را حفظ نیستیم پس می‌توانیم مسائل را به زبان خودمان یعنی مبنای ۱۰ ترجمه کنیم و در همین مبنا محاسبات را انجام داده و سپس به مبنای خواسته شده توسط مسئله تبدیل کنیم. در مورد عملیات جمع و تفریق، می‌توانیم از مبنای ۱۰ استفاده نکنیم و از جدول کمک نگیریم.

جمع

۱- استفاده از جدول ✓

۲- تبدیل عملوند ها به مبنای ۱۰ و انجام عملیات جمع در این مبنا و سپس تبدیل حاصل جمع از مبنای ۱۰ به مبنای خواسته شده

$A + B$

عملگر

عملوند

تفریق

۱- استفاده از جدول ✓

۲- تبدیل عملوند ها به مبنای ۱۰ و انجام عملیات تفریق در این مبنا و سپس تبدیل حاصل تفریق از مبنای ۱۰ به مبنای خواسته شده.

ضرب: تبدیل عملوند ها به مبنای ۱۰ و انجام محاسبات در این مبنا و سپس تبدیل حاصل ضرب از مبنای ۱۰ به مبنای خواسته شده. البته در مورد مبنای ۲ نیازی به استفاده از مبنای ۱۰ نیست.

تقسیم: فقط و فقط باید عملوند ها را به مبنای ۱۰ برده و پس از انجام عملیات تقسیم در این مبنا، حاصل را به مبنای خواسته شده ببریم.

جمع اعداد در مبناهای غیر ۱۰

$$\begin{array}{r} {}^{۱\;\;۱} \\ (۲۷۴)_{۱۰} \\ +\,(۳۵۷)_{۱۰} \\ \hline (۶۳۳)_{۱۰} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{۱\;\;۱} \\ (۲۷۴)_{۸} \\ +\,(۳۵۷)_{۸} \\ \hline (۶۵۵)_{۸} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{۱۱۱۱۱} \\ (۱۰۱۱۰۱)_{۲} \\ +\,(۰۱۰۱۱۱)_{۲} \\ \hline (۱۰۰۰۱۰۰)_{۲} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{۱} \\ (۲A۵۸)_{۱۶} \\ +\,(۷۱D۰)_{۱۶} \\ \hline (۹C۲۸)_{۱۶} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{۱\;\;۱} \\ (۲F۲C)_{۱۶} \\ +\,(۲FAA)_{۱۶} \\ \hline (۵ED۶)_{۱۶} \end{array}$$

جمع دو عدد در مبنای ۲

$$
\begin{array}{ccccl}
 & 1 & 1 & & \leftarrow \text{Carry} \\
 & & 5 & 5 & \\
+ & & 5 & 5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

مبنای ۱۰

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & = 61 \\
+ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & = 23 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & = 84
\end{array}
$$

مبنای ۲

ضرب دو عدد در مبنای۲

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

تفریق دو عدد بی علامت در مبنای ۲ به روش مستقیم(روش قرض گرفتن)

هنگام استفاده از قلم و کاغذ مفید است

		1			2			
	0	~~2~~	2	0	0	2		
	~~1~~	0	0	~~1~~	~~1~~	0	1	= 77
–			1	0	1	1	1	= 23
	0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**= 54**

جمع و تفریق اعداد علامت دار

به روش های متداول قبلی قابل انجام است.

معمولا در کامپیوتر در سیستم **مکمل۲** انجام می شود

باید همه عموندها را به سیستم مکمل ۲ ببریم

جواب نهایی در سیستم مکمل ۲ به دست خواهد آمد باید برای خواندن آن دقت کنیم

جمع دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

جمع در سیستم مکمل ۲ یا سیستم ۲ (2's complement): بدون توجه به مثبت یا منفی بودن اعداد، آنها را زیر هم نوشته و جمع می کنیم و در نهایت از رقم نقلی خروجی صرف نظر می کنیم یعنی آن را حذف می کنیم.

مثال: حاصل عملیات جمع را در با ۴ بیت در سیستم مکمل ۲ بیابید.

$$\begin{array}{r} 1\,111 \\ 1001 = -(0111) = -7 \\ +\ 0111 = +7 \\ \hline (1)0000 = 0 \end{array}$$

حذف

$$\begin{array}{r} 0011 = +3 \\ +\ 0100 = +4 \\ \hline 0111 = +7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 0010 = +2 \\ +\ 0111 = +7 \\ \hline \boxed{1001 = -(0111) = -7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0001 = +1 \\ +\ 1001 = -(0111) = -7 \\ \hline 1010 = -(0110) = -6 \end{array}$$

Over flow رخ داده است .جواب اشتباه به دست آمده

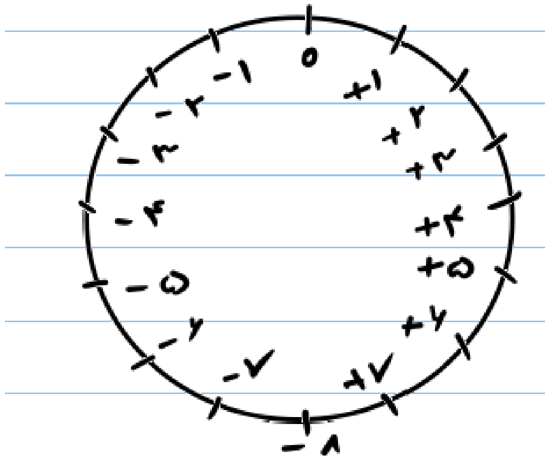
سرریز (Over flow)

- اعداد در کامپیوتر با طول محدود و تعداد بیت های مشخص به کاربرده می شوند. اگر نتیجه محاسبات خارج از این محدوده شود و بیت های بیشتر در دسترس نباشد، این بیت های اضافی حذف خواهد شد و نتیجه بدست آمده صحیح نخواهد بود. در این حالت گوییم در انجام محاسبه سرریز اتفاق افتاده است.

فلگ V یا OF (overflow flag): این فلگ وقتی یک می شود که نتیجه محاسبات در بازه ی مجاز تعداد بیت ها نباشد در این حالت می گویند اورفلو یا سرریز رخ داده است.

بازه مختلف ساخت اعداد در سیستم های مختلف با کمک n بیت

	ماکزیمم عدد با n بیت	مینیمم عدد با n بیت
سیستم بی علامت	$(111\ldots1)_2 = 2^n - 1$	0
سیستم علامت و مقدار	$(011\ldots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	$(111\ldots1)_2 = -(2^{n-1} - 1)$
سیستم مکمل۱	$(011\ldots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	$(100\ldots0)_2 = -(2^{n-1} - 1)$
سیستم مکمل۲	$(011\ldots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	$(100\ldots0)_2 = -2^{n-1}$



تشخیص سرریز دو عدد بدون علامت

- درجمع اعداد بدون علامت، اگر پس از جمع دو عدد بدون علامت رقم نقلی نهایی یک شود سرریز اتفاق افتاده است.

$$
\begin{array}{rl}
 & \overset{1}{} \\
 & (1101)_2 = 13 \\
+ & (1100)_2 = 12 \\
\hline
1 & (1001)_2 = 9
\end{array}
$$

تشخیص سرریز در اعداد علامت دار مکمل ۲

: اگر جمع دو عدد منفی، مثبت شود یا جمع دو عدد مثبت، منفی شود، سرریز است.

دقت کنید جمع عدد منفی با عدد مثبت سرریز ندارد.

اگر دو عدد A و B در سیستم مکمل ۱ یا مکمل ۲ باشند آنگاه A + B در صورتی سرریز خواهد بود که

۱ـ اگر A و B هردو مثبت باشند و حاصل منفی باشد

۲ـ اگر A و B هردو منفی باشند و حاصل مثبت باشد

نتیجه: اگر دو عدد مختلف العلامه باشند اورفلو یا سرریز رخ نمی‌دهد.

اگر دو عدد A و B در سیستم مکمل ۱ یا ۲ باشند آنگاه A − B در صورتی سرریز خواهد شد که

۱ـ A مثبت باشد، B منفی باشد و حاصل منفی شود

مثبت منفی

A − (B) = باید مثبت شود

۲ـ A منفی باشد، B مثبت باشد و حاصل مثبت شود

منفی مثبت

A − (B) = باید منفی باشد

مثال هایی از جمع حسابی دو عدد در سیستم مکمل ۲

+ 6	00000110
+13	00001101
+19	00010011

− 6	11111010
+13	00001101
+ 7	00000111

+ 6	00000110
−13	11110011
− 7	11111001

−6	11111010
−13	11110011
−19	11101101

تفریق دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

۱_ A را با مکمل ۲ عدد B جمع می کنیم و از آنجایی که تفریق به جمع تبدیل شده است و در سیستم مکمل ۲ هستیم، از رقم نقلی خروجی صرف نظر می کنیم

$$A - B = A + (-B) = A + (\bar{B} + 1)$$

روش دوم: B را زیر A نوشته و در صورت لزوم از رقم با ارزش تر قرض می گیریم و تفریق را انجام می دهیم.

$$\begin{array}{rl} & 1101 = -3 \\ - & 1001 = -7 \\ \hline & 0100 = +4 \end{array}$$

مکمل ۲

$$\begin{array}{rl} & 111 \\ & 1101 = -(0011) = -3 \\ + & 0111 = +7 \\ \hline & 1\,0100 = +4 \end{array}$$

حذف

Over flow رخ داده است .جواب اشتباه به دست آمده

تفریق دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

۰ ۱۰
۱۱۰۰
− ۱۰۱۰
۰۰۱۰

مکمل ۲ →

۱
۱۱۰۰ = −(۰۱۰۰) = −۴
+ ۰۱۱۰ = +۶
(۱)۰۰۱۰ = +۲
حذف

۰ ۱۰
۱۰۰۱
− ۰۱۰۰
۰۱۰۱

۱۰۰۱ = −(۰۱۱۱) = −۷
+ ۱۱۰۰ = −(۰۱۰۰) = −۴
(۱)۰۱۰۱ = +۵
حذف

Over flow رخ داده است .جواب اشتباه به دست آمده

مثال

با فرض دو عدد دودویی $X = 1010100$ و $Y = 1000011$ ، تفریق‌های زیر را انجام دهید.

(الف) $X - Y$ و (ب) $Y - X$ با استفاده از متمم 2

(الف)

$$
\begin{array}{rcr}
X & = & 1010100 \\
\text{متمم 2 عدد } Y & = & +\underline{\;0111101} \\
\text{حاصل جمع} & = & 10010001 \\
\text{چشم‌پوشی از نقلی انتهایی } 2^7 & = & -\underline{10000000} \\
X - Y & = & 0010001
\end{array}
$$

جواب :

(ب)

$$
\begin{array}{rcr}
Y & = & 1000011 \\
\text{متمم 2 عدد } X & = & +\underline{\;0101100} \\
\text{حاصل جمع} & = & 1101111
\end{array}
$$

رقم نقلی انتهایی وجود ندارد.

بنابراین، جواب $Y - X = $ (متمم 2 عدد 1101111) $- = -0010001$ است.

جمع حسابی اعداد باینری در سیستم مکمل ۲

- برای جمع کردن دو عدد باینری علامت‌دار، با نمایش اعداد منفی به صورت مکمل ۲- علامت‌دار، دو عدد با لحاظ کردن بیت علامت با هم جمع می‌شوند. از بیت نقلی خروجی چشم‌پوشی می‌گردد.

توجه کنید که اعداد منفی باید از ابتدا به صورت متمم 2 باشند و حاصل جمع اگر منفی باشد به صورت متمم 2 خواهد بود. مثلاً، 7− ، به صورت 11111001 نمایش داده می‌شود که متمم 7+ است.

کد کردن اعداد دهدهی

- کدها باید به صورت دودویی باشند زیرا کامپیوترها فقط قادرند صفرها و یک ها را نگه داری کنند.
- کدها فقط نماد یا سمبل نمایش اطلاعات را عوض می کنند و نه مفهوم آن ها را.
- یک کد دودویی n بیت، 2^n ترکیب ممکن از یک ها و صفرها را دارا است.

- کدهای وزن دار : به هر مکان یک وزن اختصاص داده می شود مثل کد BCD

- کدهای بدون وزن: مثل کد افزودنی ۳

کدهای متداول

BCD یک کد وزن دار است به وزن های آن ۱ ۲ ۴ ۸ است

ex-3 : یک کد بدون وزن است که با افزودن عدد ۳ به معادل دهدهی بدست می آید.

نکته مهم: (BCD) را با مبنای ۲ اشتباه نگیرید.

$$(60)_{10} = (\overset{32}{1}\ \overset{16}{1}\ \overset{8}{1}\ \overset{4}{1}\ \overset{2}{0}\ \overset{1}{0})_2 = (\underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0000}_{0})_{BCD}$$

0110 0000

$$(74)_{10} = (\overset{64}{1}\ \overset{32}{0}\ \overset{16}{0}\ \overset{8}{1}\ \overset{4}{0}\ \overset{2}{1}\ \overset{1}{0})_2 = (\underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0100}_{4})_{BCD}$$

0111 0100

سایر کدهای Decimal

Decimal Digit	BCD 8421	Excess-3	84-2-1	2*421	Biquinary 5043210
0	0000	0011	0000	0000	0100001
1	0001	0100	0111	0001	0100010
2	0010	0101	0110	0010	0100100
3	0011	0110	0101	0011	0101000
4	0100	0111	0100	0100	0110000
5	0101	1000	1011	1011	1000001
6	0110	1001	1010	1100	1000010
7	0111	1010	1001	1101	1000100
8	1000	1011	1000	1110	1001000
9	1001	1100	1111	1111	1010000

مثال

مثال: عدد $(82)_{10}$ را به صورت مبنای ۲ ، BCD ، excess-3 و $84\bar{2}\bar{1}$ کد کنید.

$$\begin{array}{ccccccccc} & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & \\ (82)_{10} = (& 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 &)_{2} \end{array}$$

$$(82)_{10} = (\underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{0010}_{2})_{NBCD}$$

$$(82)_{10} = (10000110)_{84\bar{2}\bar{1}}$$

$$(82)_{10} = (\underbrace{1011}\ \underbrace{0101}_{2})_{ex-3}$$

تمرین

عدد دودویی $(10111001)_2$ را به صورت کد BCD بازنویسی کنید.

جمع اعداد در BCD

- جمع دو رقم دهدهی در BCD نمی تواند بزرگتر 1+9+9 باشد که در آن ۱، رقم نقلی قبلی است.
- ارقام BCD را به شکل دودویی جمع می کنیم، حاصل جمع بین 0 تا 19 خواهد بود، این مقادیر به دودویی برابرند با 0000 تا 10011، ولی به فرم BCD برابر با 0000 تا 11001 می باشد (اولین رقم نقلی است).

حاصل جمع دودویی (بدون رقم نقلی) ≤ 1001 ← حاصل جمع ← معتبر

حاصل جمع دودویی ≥ 1010 ← حاصل جمع ← نامعتبر ← 0110 + ← معتبر

جمع دو عدد BCD : برای جمع دو یا چند عدد BCD ، بهتر است معادل دهدهی آنها را باهم جمع کرده و پس حاصل دهدهی را به BCD تبدیل کنیم

کد گری (کد انعکاسی)

❖ **معرفی کد گری (Gray Code)**

به نظر شما چه ضرورتی به طرح کد Gray است؟

برای به دست آوردن کد گری معادل برای یک عدد باینری

۱ **پر ارزش‌ترین بیت (بیت سمت چپ) را بازنویسی می‌کنیم.**

۲ **برای بیت‌های بعدی، اگر مقدار بیت متناظر در عدد باینری نسبت به بیت قبل تغییر کرده باشد، مقدار یک و اگر بدون تغییر باشد مقدار صفر را در کد گری قرار می‌دهیم.**

چگونه می‌توان برای کد Gray داده شده، عدد باینری متناظر را به دست آورد؟

کد گری (Gray)

- کدهای حلقوی: بین هر کلمه کد و کلمه کد بعدی تنها یک بیت تغییر کرده باشد.
- از معروف ترین کدهای حلقوی کد گری است.

رقم دهدهی	Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100

رقم دهدهی	Gray
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

مثال

تبدیل باینری به گری :

عدد $(93)_{10}$ را به گری تبدیل کنید .

$$\begin{array}{ccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

$$(93)_{10} = (1\,0\,1\,1\,1\,0\,1)_2$$

$$(1\,1\,1\,0\,0\,1\,1)_{Gray}$$

عدد $(1110011)_{gray}$ را به باینری تبدیل کنید .

$$(1\,1\,1\,0\,0\,1\,1)_{Gray}$$

$$(1\,0\,1\,1\,1\,0\,1)$$

تبدیل کد باینری به گری

اگر بخواهیم یک عدد باینری با تعداد بیت های زیادی را به گری تبدیل کنیم (یا برعکس) ، این روش بسیار زمان بر خواهد بود لذا از طریق روش های زیر می توان کد باینری را به گری و یا برعکس تبدیل کرد. برای انجام این تبدیلات لازم است با عملگر XOR آشنا شویم.

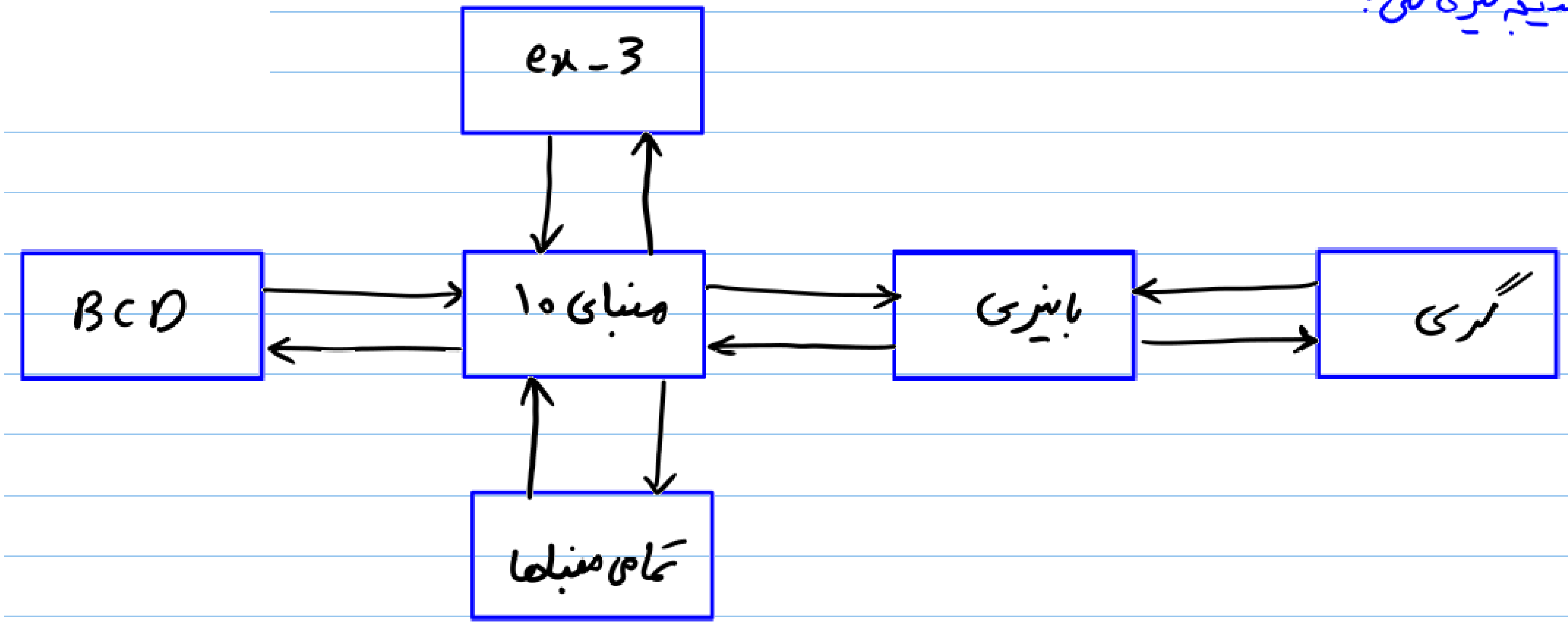
عملگر XOR :

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

کدهای دودویی

نتیجه گیری کلی:



کدهای خود مکمل

- کدهایی هستند که با تبدیل 0 به 1 کد مکمل 9 آنها به دست می آید.

Excess-3 code

0:	0011
1:	0100
2:	0101
3:	0110
4:	0111
5:	1000
6:	1001
7:	1010
8:	1011
9:	1100

کد خود مکمل

کد وزن داری خود مکمل است که مجموع وزن های آن ۹ باشد مثل کد $8\ 4\ \bar{2}\ \bar{1}$ $9 = 8 + 4 - 2 - 1$

کد بدون وزنی خود مکمل است که اگر آن را مکمل ۱ کنیم معادل دهدهی آن مکمل ۹ می شود. مثال:

$(0100)_{ex-3} = (0001)$

مکمل ۱ ↓   ↓ مکمل ۹

$(1011)_{ex-3} = (8)_{10}$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ -\ 0011 \\ \hline 1000 = 8 \end{array}$$

⇐ پس کد افزونی ۳ خودمکمل است

- کدهای وزن داری که جمع وزن های آن ۹ نیست نمی تواند خود مکمل باشد.
- کدهای ۲۴۲۱ و افزونی ۳ از کدهای خودمکمل هستند، اما کد BCD خود مکمل نیست.

کدهای تشخیص و تصحیح خطا

- هنگام انتقال داده ها ممکن است در آنها خطایی به علت تداخل های الکترومغناطیسی، حرارت زیاد و غیره به وجود آید. می توان کدهایی طراحی کرد که خطا را تشخیص و یا حتی تصحیح کنند.
- یکی از ساده ترین روشهای تشخیص خطا استفاده از بیت توازن (Parity) است. می توان به هر کلمه کد یک بیت اضافه کرد به طوری که تعداد بیت های یک آن مثلا فرد باشد.

کدهای تشخیص خطا

سیستم توازن:

- ساده‌ترین روش برای تشخیص خطا.
- یک بیت توازن به اطلاعات اضافه می‌گردد.

- دو نوع توازن وجود دارد:
  - توازن زوج
  - توازن فرد

توازن (Parity)

توازن زوج (Even Parity) :

یک بیت به اطلاعات اضافه می‌شود تا تعداد کل ۱های کد زوج گردد.

$\boxed{1}$ 0110010

$\boxed{0}$ 0100100

توازن فرد (Odd Parity) :

یک بیت به اطلاعات اضافه می‌شود تا تعداد کل ۱های کد فرد گردد.

$\boxed{1}$ 0110011

$\boxed{0}$ 0100101

توازن زوج و فرد

	پیام	even parity	odd parity
۰	۰ ۰ ۰ ۰	۰	۱
۱	۰ ۰ ۰ ۱	۱	۰
۲	۰ ۰ ۱ ۰	۱	۰
۳	۰ ۰ ۱ ۱	۰	۱
۴	۰ ۱ ۰ ۰	۱	۰
۵	۰ ۱ ۰ ۱	۰	۱
۶	۰ ۱ ۱ ۰	۰	۱
۷	۰ ۱ ۱ ۱	۱	۰
۸	۱ ۰ ۰ ۰	۱	۰
۹	۱ ۰ ۰ ۱	۰	۱
۱۰	۱ ۰ ۱ ۰	۰	۱
۱۱	۱ ۰ ۱ ۱	۱	۰
۱۲	۱ ۱ ۰ ۰	۰	۱
۱۳	۱ ۱ ۰ ۱	۱	۰
۱۴	۱ ۱ ۱ ۰	۱	۰
۱۵	۱ ۱ ۱ ۱	۰	۱

کدهای الفبایی-عددی (Alphanumeric Codes)

- علاوه بر اعداد، کامپیوتر با کاراکتر های متنی (Textual) نیز سرو کار خواهد داشت.
- این کاراکتر ها شامل موارد زیر است :

alphabets: 'A' .. 'Z', and 'a' .. z
digits: '0' .. '9'
special symbols: '$', '.', ',', '@', '*', …
non-printable: SOH, NULL, BELL, …

- به طور معمول با استفاده از ۷ یا ۸ بیت می توان آنها را نمایش داد.

کدهای الفبایی-عددی

- ASCII table:

	MSBs							
LSBs	**000**	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC_1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC_2	“	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC_3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC_4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	O	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

مطالب مهم این فصل

مبناهای عددی و تبدیل مبنا

نمایش های مختلف اعداد منفی

اعمال حسابی روی اعداد علامت دار

کدهای دودویی