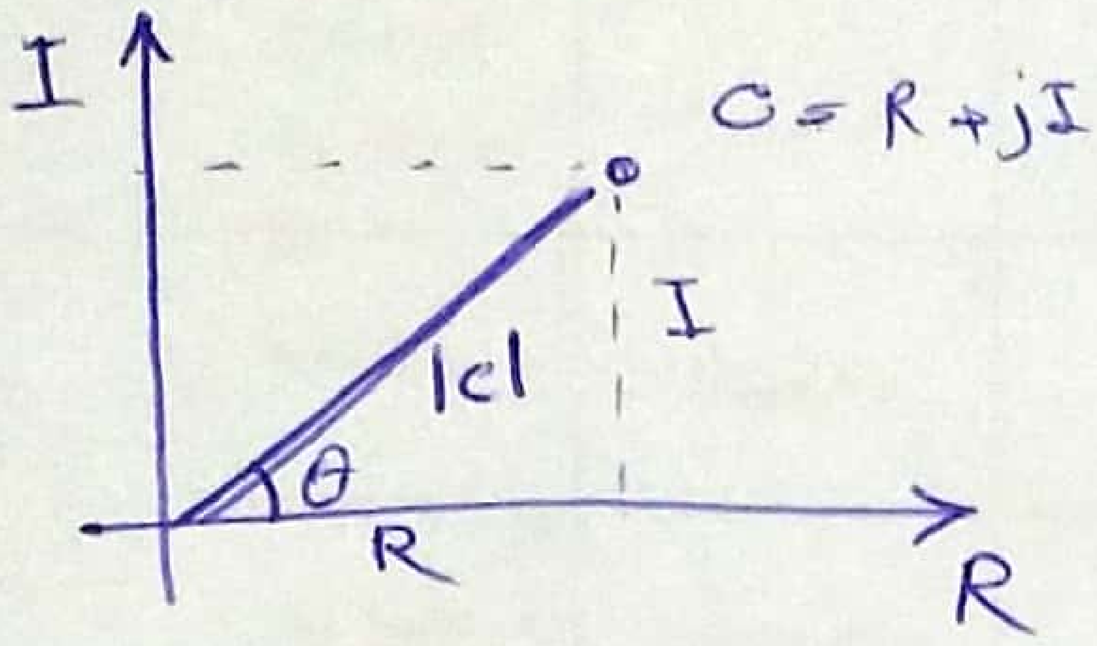
$C = R + jI$ Complex Number

حقیقی (R), $\sqrt{-1}$ (j), موهومی (I)

$C^* = R - jI$ Conjugate



$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{I}{R} \longrightarrow \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{I}{R}\right)$

$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$

$|C| \to \sqrt{R^2+I^2}$, $\theta \to \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{I}{R}\right)$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ رابطه اولر

$e \to 2.71\ldots$ Eulers Formula

$C = |C|\, e^{j\theta}$

$F(\omega) = R(\omega) + j\, I(\omega)$

$F^*(\omega) = R(\omega) - j\, I(\omega)$

$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \longrightarrow$ Magnitude of F

$\theta(\omega) = \operatorname{Arctan}\left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right]$

سری فوریه

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$f(t) \to$ تابع از متغیر پیوسته t با دوره تناوب T

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\, dt$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

② تابع ضربه — Impulse Function

Unit Impulse

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = \emptyset \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

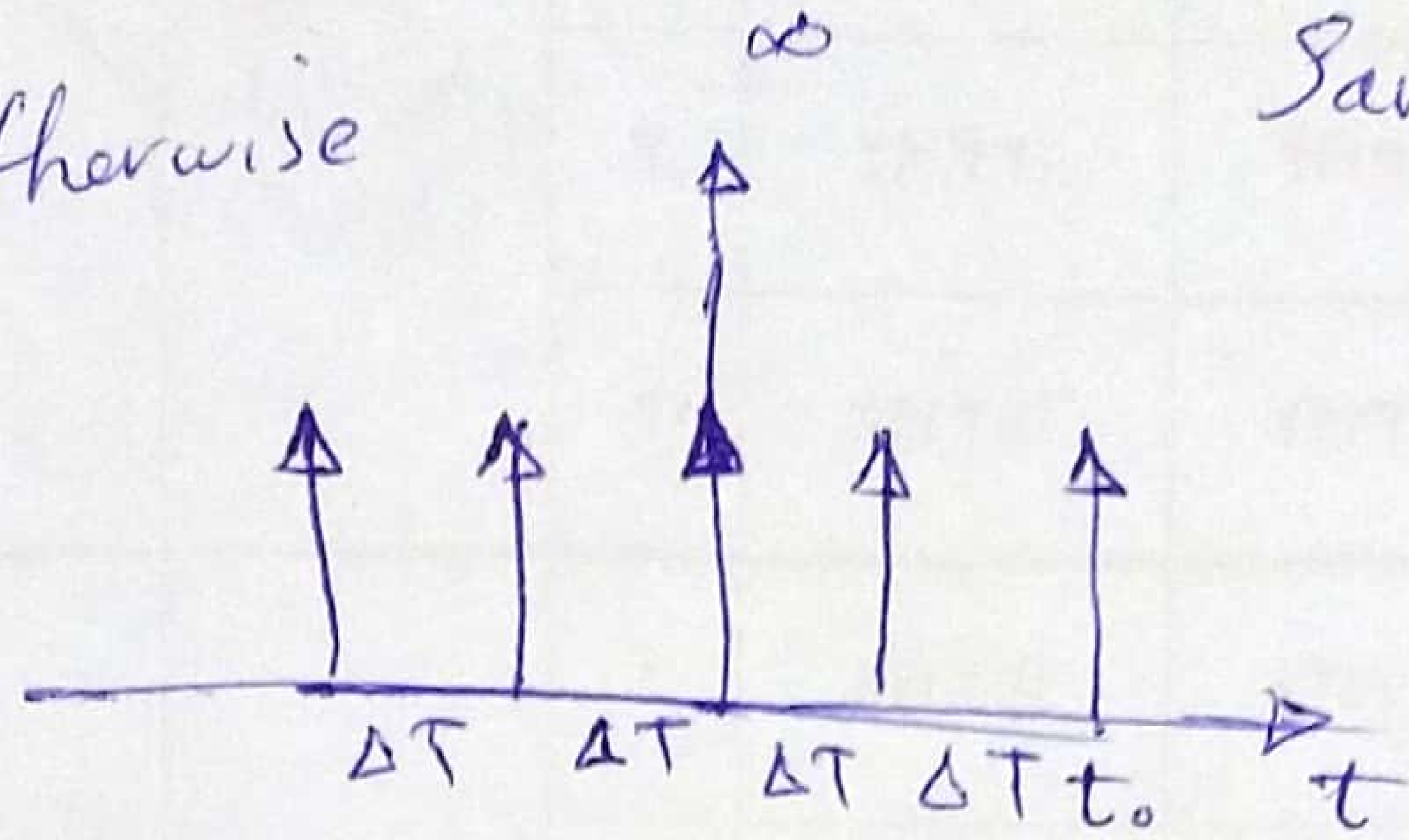
یک متغیر پیوسته

~~Contt~~ Continous.

ویژگی غربالگری — Sifting

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t)\, dt = f(\emptyset)$$

Sampling



$\delta(t) \rightarrow \delta(t - t_0)$

$t - t_0 = \emptyset$

$t = t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

ضربه در نقطه دیگر از t_0 صفر است

قطار ضربه — Impulse Train

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - K\Delta T)$$

ضربه در نقاط $K\Delta T$ رخ داده است

برای متغیر گسسته n:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = \emptyset \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \delta(n) = f(\emptyset)$$

Sifting property.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot \delta(n - n_0) = f(n_0)$$

تبدیل فوریه یک تابع پیوسته $f(t)$ از متغیر پیوسته t :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,.\,e^{-j2\pi\mu t}\,dt = F(u)$$

متغیر پیوسته

فرکانس

تابعی از فرکانس

تابع تبدیل فوریه معکوس:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{j2\pi\mu t}\, dt$$

ثانیه

Sec

~~Sec~~ Cycle/Sec

$$\underset{\text{Unit}}{f(t)} \Longleftrightarrow \underset{\text{Cycle/Unit}}{F(u)}$$

Fourier Transform pair

$$f(t) \xrightarrow{\text{Forward fourier}} F(u)$$

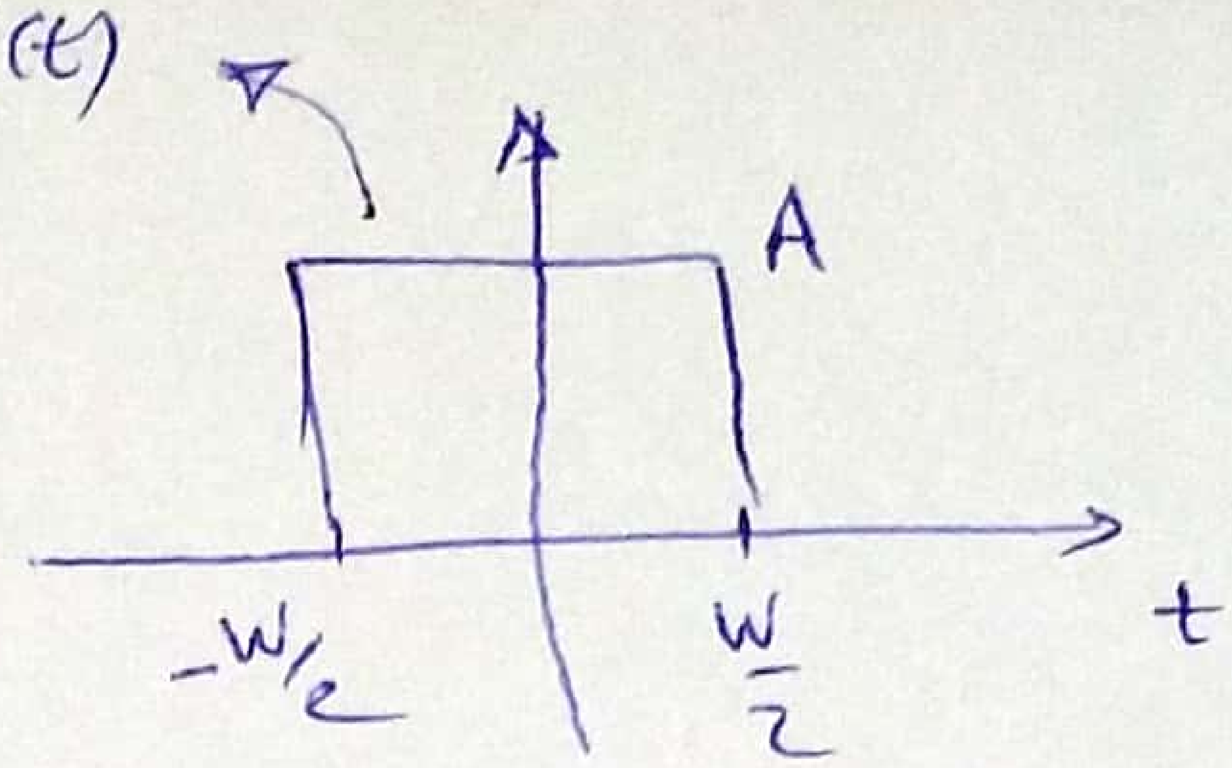
$$\xleftarrow[\text{Inverse Fourier}]{}$$

تبدیل فوریه با استفاده از رابطه اویلر:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)]\,dt$$

ج۲

$$f(t) = \begin{cases} A & -\frac{W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2} \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$



۴

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi\mu t} \, dt$$

$$= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} A \, e^{-j2\pi\mu t} \, dt$$

$$= \frac{A}{-j2\pi\mu} \left[e^{-j2\pi\mu t} \right]_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} = \frac{A}{-j2\pi\mu} \cdot \left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi\mu} \left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W} \right] = AW \frac{\sin \pi\mu W}{\pi\mu W}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$\sin(\pi\mu W)$

m

$\text{Sinc}(\mu W)$

$$\text{Sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m}$$

$\text{sinc}(\emptyset) = 1$

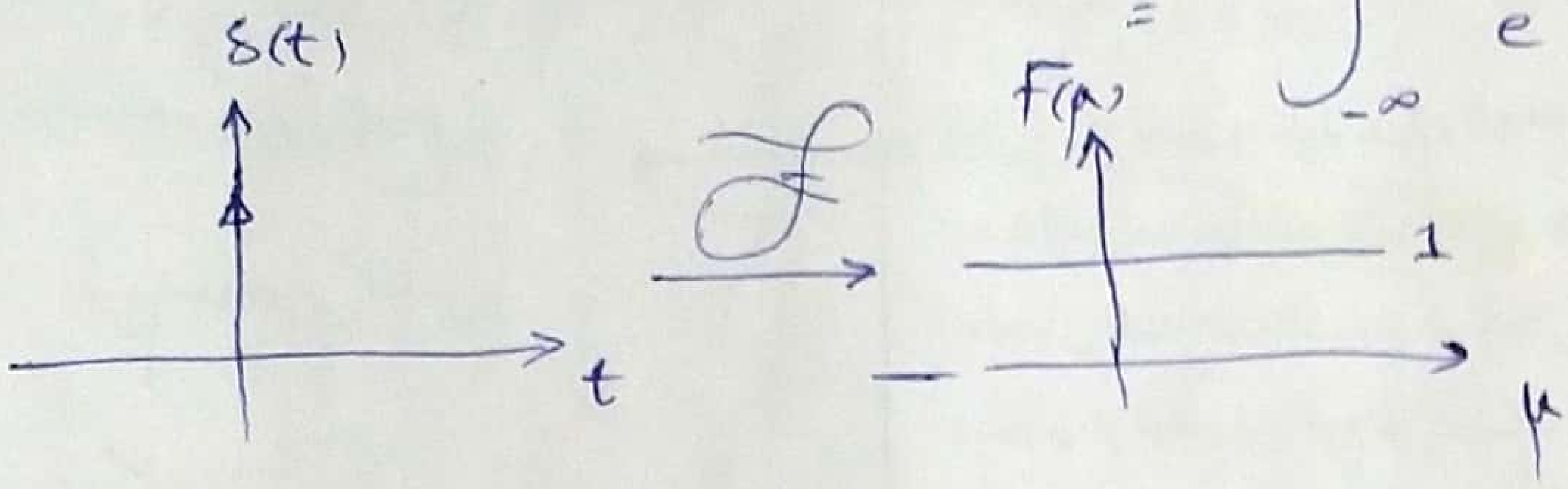
$\text{Sinc}(m) = \emptyset$

for integer m

مثال ۲ : تبدیل فوریه تابع ضربه و قطار ضربه :

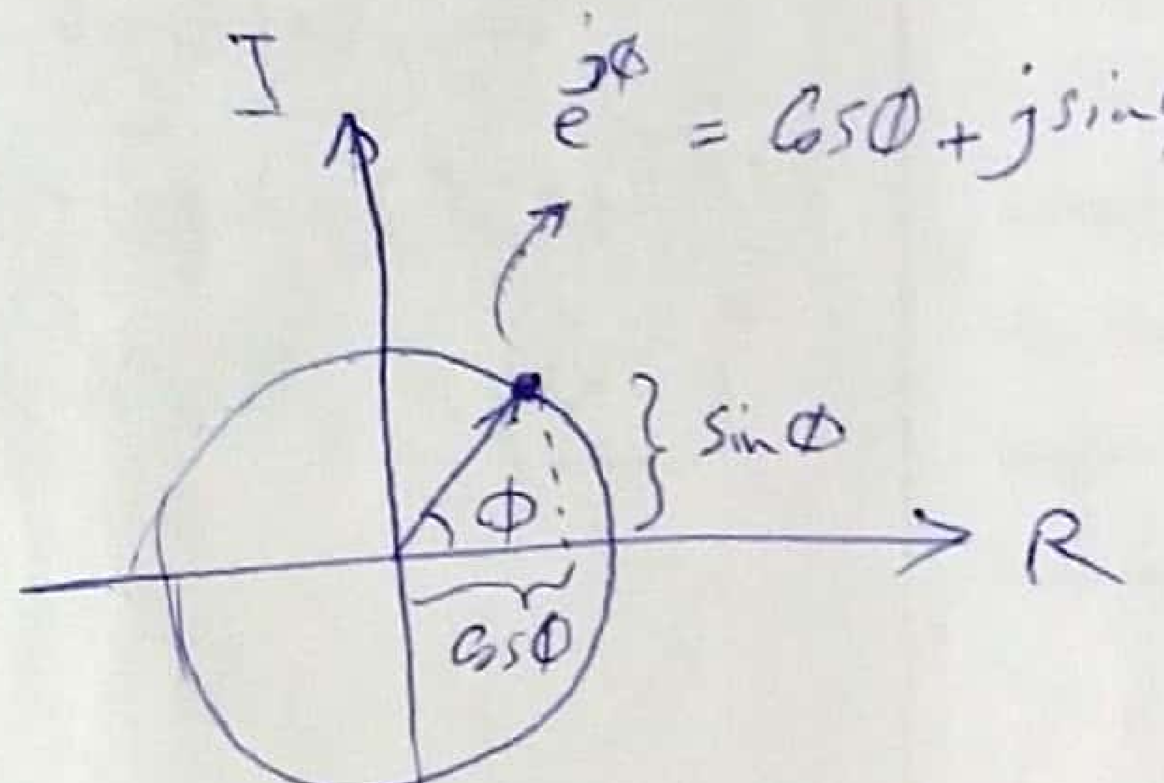
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t}\, \delta(t)\, dt = e^{-j2\pi\mu \emptyset} = 1$$



تبدیل فوریه یک تابع ضربه در مبدأ حوزه مکان، یک مقدار ثابت است که در حوزه فرکانس است.

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$



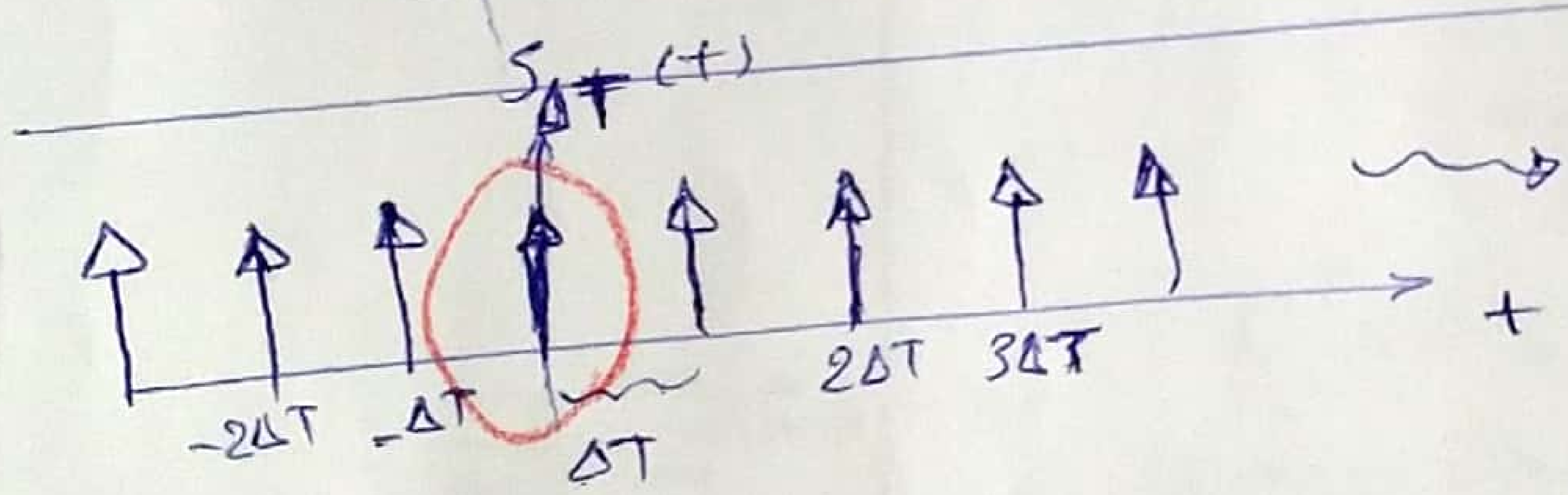
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t}\, \delta(t-t_0)\, dt = e^{-j2\pi\mu}$$

مقدار تابع در نقطه t_0

مثال هندسی، یک دایره واحد، بردار مبدأ مختصات در صفحه مختلط.

قطار ضربه :

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t - K\Delta T)$$



سری فوریه

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T} \cdot t}$$

$$C_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} S_{\Delta T}(t)\, e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \cdot e^{0} = \frac{1}{\Delta T}$$

$$S_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}\{S_{\Delta T}(t)\} = \mathcal{F}\Big\{\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}\Big\} = \frac{1}{\Delta T}\, \mathcal{F}\Big\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}\Big\}$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum \mathcal{F}\{e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T} t}\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

تبدیل فوریه یک قطار ضربه با دوره تناوب ΔT، باز هم یک قطار ضربه است اما این بار با دوره تناوب $\frac{1}{\Delta T}$.

کانولوشن : Convolution

کانولوشن دو تابع پیوسته $f(t)$, $h(t)$ از متغیر پیوسته t :

$$(f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}\{(f \star h)(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\right] e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt}_{\mathcal{F}\{h(t-\tau)\} = H(\mu)\cdot e^{-j2\pi\mu\tau}} \Big]\, d\tau$$

$$H(\mu) \to \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\underline{H(\mu)}\, e^{-j2\pi\mu\tau}\right] d\tau$$

$$= H(\mu) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-j2\pi\mu\tau}\, d\tau}_{\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mu)}$$

$$= H(\mu) \cdot F(\mu) = (H \cdot F)(\mu)$$

← تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع در حوزه مکان برابر است با ضرب تبدیل فوریه دو تابع در حوزه فرکانس μ

و همینطور عکس این رابطه را داریم :

$$(f \cdot h)(t) \iff (H \star F)(\mu)$$

یعنی کانولوشن در حوزه فرکانس معادل است با ضرب در حوزه مکان.

7

نمونه برداری و تبدیل فوریه توابع نمونه برداری شده:

Sampling

توابع پیوسته باید قبل از پردازش در کامپیوتر به یک دنباله ای از مقادیر گسسته تبدیل شوند.

Sampling نمونه برداری

Quantization چندی سازی

می خواهیم تابع $f(t)$ از متغیر پیوسته t را در فواصل یکنواخت ΔT نمونه برداری کنیم. می دانیم $f(t)$ در بازه $-\infty$ تا $+\infty$ گسترده است.

برای نمونه برداری کافیست تابع $f(t)$ را در یک قطار ضربه با دوره تناوب ΔT ضرب کنیم. یعنی:

Sampled function

$$\tilde{f}(t) = f(t)\cdot s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \delta(t-n\Delta T)$$

Sifting Property.

$$f(k\Delta T) = f_k = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{f}(t)}\cdot \delta(t-k\Delta T)\,dt$$

$k=0,\pm1,\pm2,\dots$

مقدار تابع $f(t)$ در نقطه $k\Delta T$

تبدیل فوریه تابع نمونه برداری شده:

$$\tilde{f}(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\mu)$$

نظریه کانولوشن

$$\tilde{F}(\mu) = \mathcal{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\cdot s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu)$$

تبدیل فوریه قطار ضربه

$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

$$\tilde{F}(\mu) = \dots = (F \star S)(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, S(\mu-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu-\tau-\frac{n}{\Delta T}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, \delta\left(\mu-\tau-\frac{n}{\Delta T}\right) d\tau}_{\text{sifting}}$$

$$= \frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$$

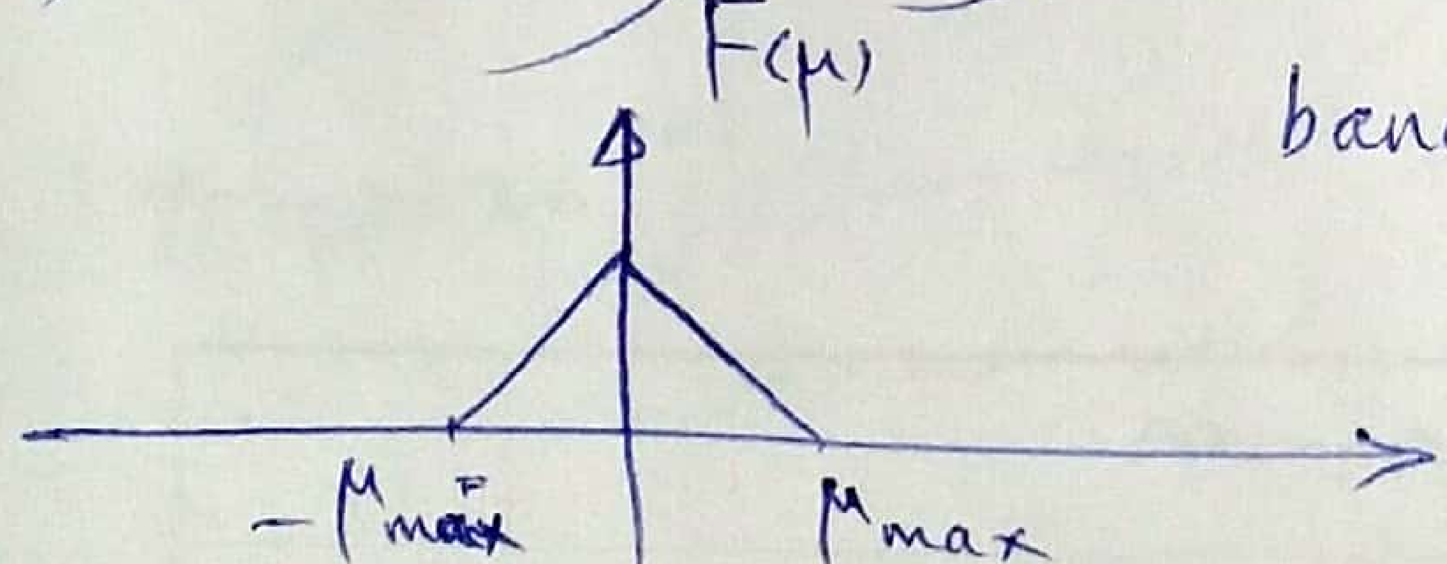
تبدیل فوریه تابع نمونه‌برداری شده $\tilde{f}$ که همان $\tilde{F}$ است، یک دنباله بی‌نهایت و متناوب از کپی‌های از تبدیل فوریه تابع پیوسته اولیه (پیش از نمونه‌برداری) است. فاصله بین کپی‌ها $\frac{1}{\Delta T}$ است.

$\frac{1}{\Delta T}$ → Sampling Rate

برخلاف $\tilde{f}$ که تابع نمونه‌برداری شده است، تبدیل فوریه‌اش $\tilde{F}$ پیوسته است زیرا از کپی‌هایی از $\tilde{F}$ تشکیل شده است.

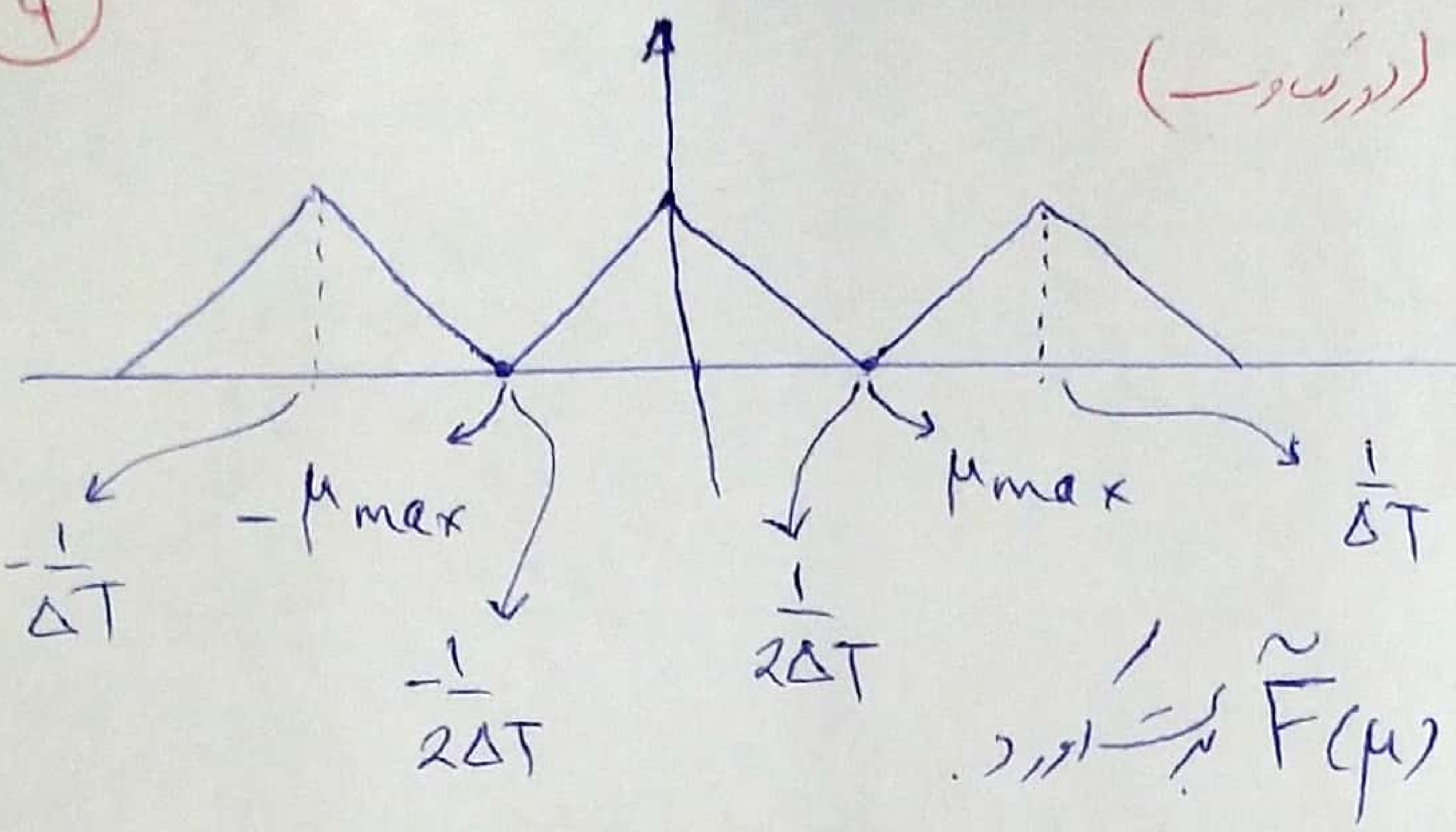
Sampling Theorem — قضیه نمونه‌برداری

تعیین شرایطی که تحت آن شرایط که تابع پیوسته را می‌توان از روی نمونه‌های آن در فضای گسسته بازسازی کرد.



band-limited function → که تابعی $f(t)$ است که تبدیل فوریه‌اش فقط در یک بازه $[-\mu_{max}, \mu_{max}]$ مقدار دارد و در خارج از این بازه مقدارش صفر است.

یک پریود کامل (دور شده)



زمانی می‌توان $f(t)$ را از روی نمونه‌های آن بازسازی کرد که بتوان یک دوره کامل از $F(\mu)$ از مجموعه کپی‌های متناوب آن در $\tilde{F}(\mu)$ بدست آورد.

استخراج یک دوره تناوب کامل از $\tilde{F}(\mu)$ زمانی مقدور است که به اندازه کافی از هم دور باشند.

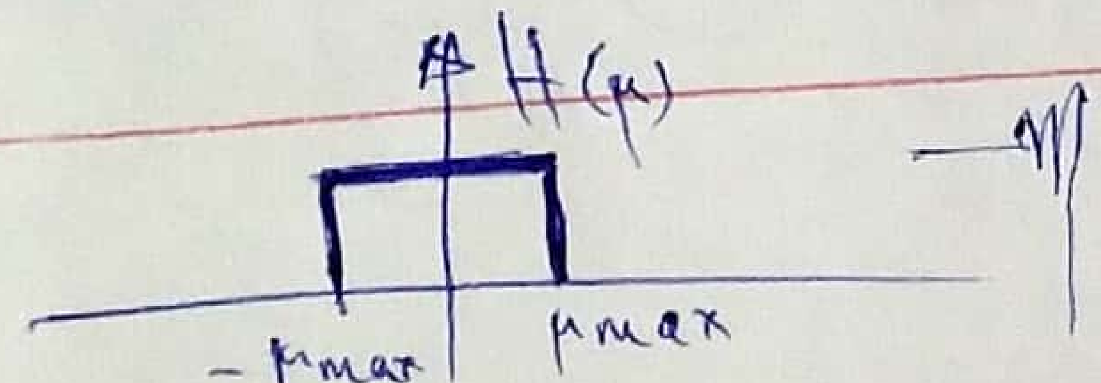
$$\frac{1}{2\Delta T} > \mu_{max} \longrightarrow \frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

$\frac{1}{\Delta T}$ → Sampling Rate

نرخ نمونه‌برداری باید از دو برابر بزرگترین جزء فرکانسی سیگنال بیشتر باشد.

Sampling Theorem

$$\frac{1}{\Delta T} = 2\mu_{max} \longrightarrow \text{Nyquist Rate}$$



فرایند بازیابی $F(\mu)$ از $\tilde{F}(\mu)$:

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & \mu_{min} \le \mu \le \mu_{max} \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases} \longrightarrow \text{Ideal lowpass filter}$$

اگر این فیلتر پایین‌گذر در تابع $\tilde{F}(\mu)$ ضرب شود یک دوره تناوب از این تابع را جدا می‌کند.
(دوره تناوب موجود در مبدأ)

$$F(\mu) = \tilde{F}(\mu) . H(\mu)$$

Recovering

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

Aliasing :

Alias : a false identity — یک هویت کاذب

نام مستعار

یک پدیده در نمونه برداری که باعث می‌شود سیگنال‌های متفاوت پس از نمونه برداری از هم قابل تمایز نباشند.

تاثیر نمونه برداری با نرخ کمتر از نرخ نایکوئیست، روی هم افتادن دوره‌های تبدیل فوریه و عدم امکان جدا کردن یک دوره تناوب.

متاسفانه همواره (به غیر از موارد بسیار خاص) پدیده aliasing را داریم. زیرا حتی در خصوص توابع باند فرکانسی محدود، زمانی که تداوم (duration) تابع را محدود می‌کنیم بی‌نهایت جزء فرکانسی به آن اضافه می‌شود.

(کاری که در عمل مجبور به انجام آن هستیم)

فرض کنیم بخواهیم مدت زمان یک تابع باند محدود $f(t)$ را به یک بازه $[0, T]$ محدود کنیم. برای اینکار کافیست $h(t) = \begin{cases} \emptyset & 0 \leq t \leq T \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$ را در $f(t)$ ضرب کنیم. تبدیل فوریه $h(t)$ یعنی $H(\mu)$ اجزای فرکانسی دارد که در دو جهت به سمت بی‌نهایت حرکت می‌کند. از طرفی می‌دانیم که $f(t) . h(t)$ معادل کانولوشن $F(\mu)$ و $H(\mu)$ در حوزه فرکانس است. حتی اگر $F(\mu)$ باند محدود باشد، این کانولوشن باعث می‌شود مولفه‌های فرکانسی زیادی در هر دو جهت به سمت بی‌نهایت در تابع ایجاد شود.

نتیجه: هیچ تابع با مدت زمان محدود، نمی‌تواند باند محدود باشد.

به عبارتی یک تابع Band limited باید از ∞ تا $-\infty$ گسترده شده باشد.

مشکل دیگر Aliasing اینست که راهی برای فهم اینکه این نمونه‌ها، نمونه‌های آیا از جنس واقعی سیگنال هستند وجود ندارد.

بازسازی تابع از روی نمونه‌ها:

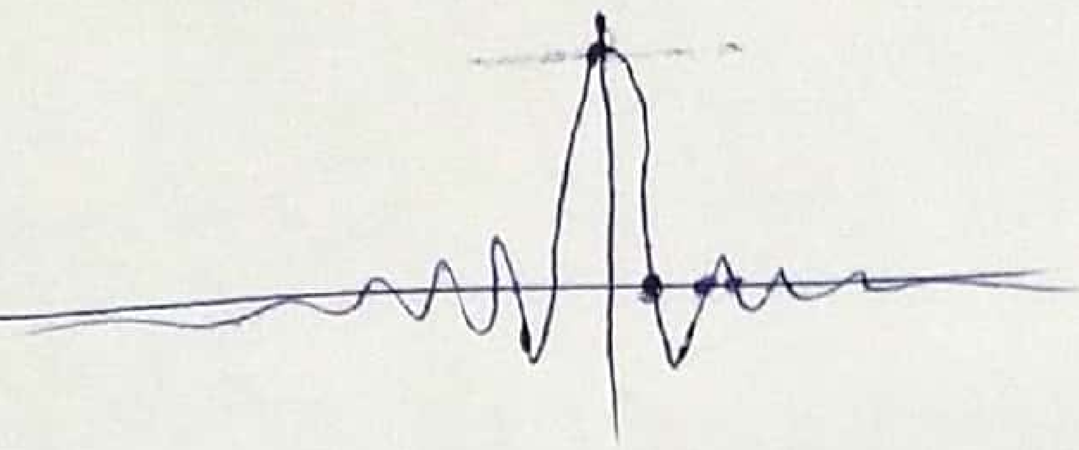
$$F(\mu) = H(\mu) \cdot \tilde{F}(\mu)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(\mu) \cdot \tilde{F}(\mu)\} = h(t) \star \tilde{f}(t) \rightarrow \text{sampled function}$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - n\Delta T)$$

$$f \star h = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

?



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \cdot \text{sinc}\left[\frac{(t - n\Delta T)}{\Delta T}\right]$$

تابع بازسازی شده $f(t)$ که جمع بی‌نهایت از توابع sinc است که دقیقا در نمونه‌ها تابع را بازسازی کرده‌اند.

$$t = k\Delta T \rightarrow f(k\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\, \underbrace{\text{sinc}\left[\frac{k\Delta T - n\Delta T}{\Delta T}\right]}_{\text{Sinc}(k-n)} \rightarrow \begin{cases} \text{Sinc}(0) = 1 \\ \text{Sinc}(m) = 0 \end{cases}$$

$$= f(k\Delta T)$$

Discrete Fourier Transform (DFT): تبدیل فوریه گسسته توابع گسسته

$$\tilde{F}(\mu) = \dots = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \cdot e^{-j2\pi\mu t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - n\Delta T)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt$$

پیوسته

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - n\Delta T)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

تابع گسسته

Sifting property of δ

با وجود اینکه f_n یک تابع گسسته است، تبدیل فوریه آن $\tilde{F}(\mu)$ یک تابع پیوسته نامحدود و متناوب با دوره تناوب $\frac{1}{\Delta T}$ است. برای تعیین $\tilde{F}(\mu)$ کافیست از یک دوره تناوب آن نمونه‌برداری کنیم ← اساس روش DFT.

فرض کنید می‌خواهیم M نمونه با فواصل مساوی از $\tilde{F}(\mu)$ در بازه یک دوره تناوب $\mu \in [0, \frac{1}{\Delta T}]$ بدست آوریم. پس نمونه‌هایی در فرکانس‌های زیر داریم:

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$\tilde{F}\left(\frac{m}{M\Delta T}\right) = \overset{F(u)}{F_m} = \sum_{n=0}^{M-1} \underset{f(x)}{f_n} e^{-j2\pi mn/M}$$

Discrete Fourier Transform (DFT)

$m = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1$

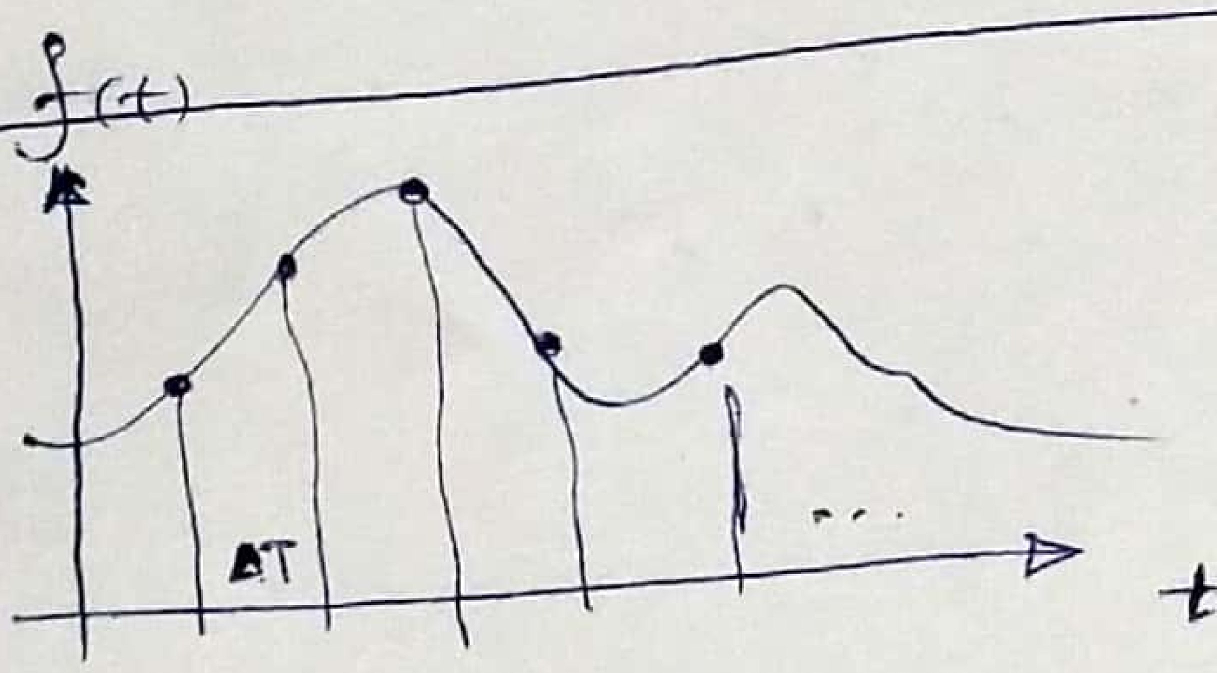
$$f(x) \leftarrow f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \underset{F(u)}{F_m} e^{j2\pi mn/M} \longrightarrow \text{Inverse DFT}$$

نکته: در روابط فوق، بازه نمونه‌برداری (ΔT) وابسته نیستند و لذا نوع DFT, IDFT را می‌توان برای هر مجموعه محدودی از مقادیر گسسته که بصورت یکنواخت نمونه‌برداری شده‌اند اعمال کرد.

می‌توان نشان داد که DFT, IDFT با دوره تناوب M متناوب هستند

$$F(u) = F(u + KM), \quad f(x) = f(x + KM)$$

ارتباط بین نمونه‌برداری و بازه‌های فرکانسی:



اگر $f(x)$ حاوی M نمونه از تابع $f(t)$ باشد که با فواصل ΔT برداشت شده‌اند. طول سیگنال حاوی مجموعه $\{f(x)\}_{x=0,\dots,M-1}$ برابر با $T = M\Delta T$.

به طوریکه، در حوزه فرکانس فواصل متناظر Δu برابر است با:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

و کل بازه فرکانسی که توسط M جزء از DFT پوشش داده می‌شود برابر است با:

$$R = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

نتیجه:

frequences Resolution $\longleftarrow \Delta u = \frac{1}{T}$

Spatial Resolution $\longleftarrow \Delta T = \frac{1}{R}$

تعمیم به توابع دو بعدی :

پیوسته

$$\delta(t,z) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\,\delta(t,z)\,dt\,dz = f(0,0) \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\,\delta(t-t_0,\, z-z_0)\,dt\,dz = f(t_0, z_0) \end{aligned}\right\} \text{Sifting Property.}$$

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ 1 & - \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x,y) = f(0,0) \\ &\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x-x_0,\, y-y_0) = f(x_0,y_0) \end{aligned}\right\}$$

در کار با تصاویر بازه تغییرات x و y به ابعاد تصویر محدود می‌باشد.

زوج تبدیل فوریه دو بعدی پیوسته :

$$F(\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\, e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)}\, dt\, dz$$

$$f(t,z) = \iint F(\mu,\nu)\, e^{j2\pi(\mu t + \nu z)}\, d\mu\, d\nu$$

مثال :

$$F(\mu,\nu) = \iint f(t,z)\, e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)}\, dt\, dz = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)}\, dt\, dz$$

$$= ATZ \left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{\pi\mu T}\right]\left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{\pi\nu Z}\right]$$

نمونه برداری دو بعدی و قضیه نمونه برداری دو بعدی :

Sampling funct : $s_{\Delta T \Delta Z}(t,z) = \sum\sum \delta(t - m\Delta T,\, z - n\Delta Z)$

فواصل بین نمونه‌ها در جهت محورهای t و z.

$$\left.\begin{aligned} \text{for } &|\mu| > \mu_{max} \\ &|\nu| > \nu_{max} \end{aligned} \longrightarrow F(\mu,\nu) = 0 \right\}$$

قضیه نمونه برداری دو بعدی : یک تابع باند محدود پیوسته دو بعدی $f(t,z)$ می‌تواند بدون خطا از مجموعه‌ای از نمونه‌ها بازسازی شود اگر فواصل نمونه برداری شرایط زیر را داشته باشند :

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max} \quad , \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{max}$$

(۱۴)

Aliasing in Images:

① Spatial Aliasing
② Temporal "

وقتی aliasing در تصویر به دو شکل نمود پیدا می‌کند:

① ← مربوط به Under Sampling است در تصویر از وقتی الگوهای تکراری شونده قابل رؤیت خود را نشان میدهد.

② ← به بازه زمانی بین تصاویر در ایجاد کردن از تصاویر پویا مرتبط است.

← مثال مشهور: Wagon Wheel که در آن چرخ‌ها دارای پره در حال چرخش به نظر می‌رسد برعکس می‌چرخند.

← دلیل ایجاد: زیرا frame rate نسبت به سرعت چرخش چرخ‌ها در تصویر بسیار پایین‌تر است.

Spatial Aliasing در تصویر باعث ایجاد اثرات مصنوعی زیر می‌شود:

Artifacts

- دندانه‌دار شدن خطوط Jaggedness
- هایلایت‌های جعلی Spurious Highlights.
- ظهور الگوهای نوسانی غیر موجود در تصویر اصلی.

تبدیل فوریه دو بعدی گسسته و معکوس آن:

DFT

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$u=0,1,\dots,M-1$
$v=0,1,\dots,N-1$

$\Updownarrow$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$x=0,1,\dots,M-1$
$y=0,1,\dots,N-1$

IDFT

برخی ویژگی‌های DFT دو بعدی و معکوسش:

ارتباط بین بازه‌های مکانی و فرکانسی:

مشابه حالت یک بعدی، اگر یک تابع پیوسته $f(t,z)$ نمونه‌برداری شود تا تصویر دیجیتال $f(x,y)$ دارای $M\times N$ نمونه در جهت‌های t و z را بسازد، ΔT و ΔZ فاصله بین نمونه‌ها باشند، آنگاه فاصله در حوزه فرکانس برابر است:

$$\Delta u=\frac{1}{M\Delta T}\ ,\quad \Delta v=\frac{1}{N\Delta Z}$$

انتقال و دوران: Translation & Rotation

می‌توان نشان داد که:

$$f(x,y)\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)} \Longleftrightarrow F(u-u_0\, ,\, v-v_0)$$

$$f(x-x_0\, ,\, y-y_0) \Longleftrightarrow F(u,v)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

یعنی ضرب کردن $f(x,y)$ در عبارت نمایی باعث انتقال مبدأ DFT به (u_0,v_0) می‌شود و بالعکس.

دوران: با استفاده از مختصات قطبی:

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $u = \omega\cos\phi$

$y = r\sin\theta$ $\quad$ $v = \omega\sin\phi$

می‌توان نشان داد که

$$f(r, \theta+\theta_0) \Longleftrightarrow F(\omega, \phi+\theta_0)$$

یعنی دوران $f(x, y)$ به اندازه زاویه θ_0 باعث دوران F به اندازه θ_0 در حوزه فرکانس می‌شود.

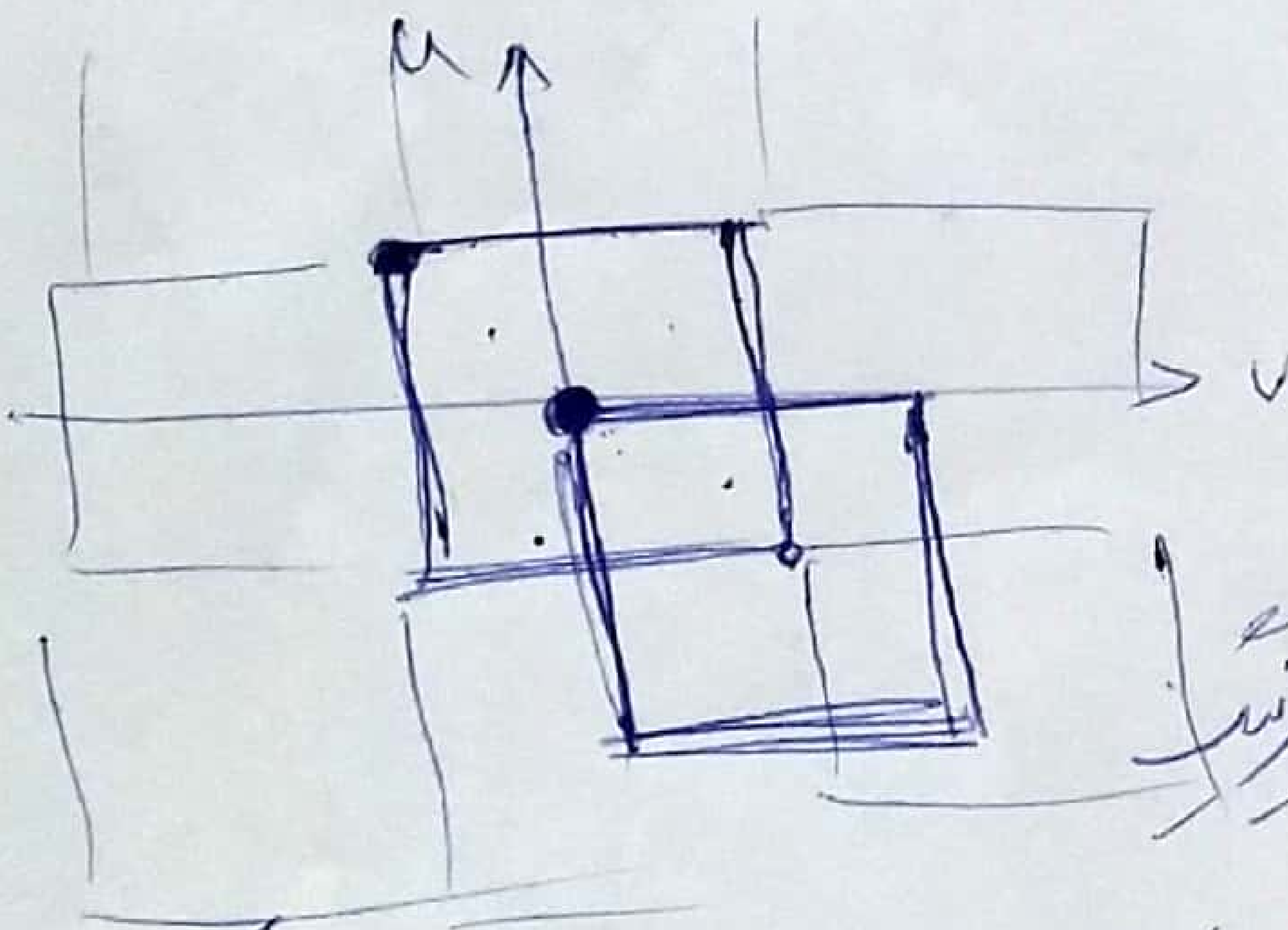
تناوب: periodicity

تبدیل فوریه دوبعدی و معکوسش در جهت‌های u, v به صورت نامحدود متناوب هستند.

$$F(u,v) = F(u+k_1M, v) = F(u, v+k_2N) = F(u+k_1M, v+k_2N)$$

k: integer

$$f(x,y) = f(x+k_1M, y) = f(x, y+k_2N) = f(x+k_1M, y+k_2N)$$



در حالت عادی تبدیل فوریه یک بعدی در بازه $[0, M-1]$ حاوی دو نیم دوره است، هدف نمایش صحیح و همینطور سهولت در فیلتر کردن است.

بهتر است در این بازه یک دوره کامل داشته باشیم. برای این منظور کافیست مبدا را به $u_0 = \frac{M}{2}$ منتقل کنیم

با توجه به رابطه $f(x)\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}\right)} \Longleftrightarrow F(u-u_0)$ کافیست $f(x)$ را در $e^{j\pi x}$ یعنی $(-1)^x$

به طور مشابه در حالت دوبعدی رابطه زیر را خواهیم داشت

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Longleftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{N}\right)$$

17

طیف فوریه و زاویه فاز:

Fourier Spectrum

phase Angle

DFT در حالت کلی یک تابع مختلط است و می‌توان آن را به فرم قطبی بیان کرد:

$$F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v) = |F(u,v)|\, e^{j\phi(u,v)}$$

$$\underbrace{|F(u,v)|}_{\text{طیف فوریه / Spectrum}} = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

$$\underbrace{\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]}_{\text{phase Spectrum}}$$

Power Spectrum: $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$

$u = 0, 1, \dots, M-1$

$v = 0, 1, \dots, N-1$

هر سه تابع فوق $|F(u,v)|$, $\phi(u,v)$, $P(u,v)$ ماتریس‌هایی با ابعاد $M \times N$ هستند.

روابط

$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$ تقارن نسبت به مبدا

$\phi(u,v) = -\phi(-u,-v)$ تقارن فرد

رابطه مهم دیگر:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN \cdot \bar{f}$$

$\bar{f}$ میانگین f

dc Component of transform

۱۸

قضیه کانولوشن گسسته دو بعدی:

$$(f \star h)(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)\, h(x-m) \qquad x = 0, \dots, M-1$$

$$(f \star h)(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,y)\, h(x-m, y-n) \qquad \begin{array}{l} x = 0, \dots, M-1 \\ y = 0, \dots, N-1 \end{array}$$

قضیه:

$\mathcal{F}\{f\} \qquad \mathcal{F}\{h\}$

$$(f \star h)(x,y) \Longleftrightarrow (F \cdot H)(u,v)$$

$$(f \cdot h)(x,y) \Longleftrightarrow \frac{1}{MN}(F \star H)(u,v)$$

در کار با تصویر آنچه اهمیت دارد نتیجه نهایی کانولوشن در حوزه مکان است که بر روی آن تصویر را تحلیل می‌کنیم

قضیه کانولوشن برای این کار دو راه را پیشنهاد می‌کند:

۱ـ انجام مستقیم کانولوشن در حوزه مکان

۲ـ محاسبه DFT هر یک از توابع f و h ، ضرب دو تابع در هم، و در نهایت محاسبه IDFT

نکته مهم: DFT بطور خودکار تناوب را به تابع تبدیل اضافه می‌کند. بنابراین پس از محاسبه IDFT با یک کانولوشن حلقوی مواجه خواهیم بود.

سوال مهم: تحت چه شرایطی خروجی دو روش ۱ و ۲ یکی خواهد بود؟

برای مثال اگر آنچه در شکل ۴-۲۷ نشان داده شده وقتی دو تابع متناوب را در هم کانولوشن کنیم نزدیکی دوره‌های تناوب باعث تداخل آنها در هم و ایجاد یک سری مقادیر نادرست می‌شوند که به آن خطای پیچیده شدن در هم می‌گوییم.

(Wraparround Error)

برای رفع این مشکل از Zero padding استفاده می‌کنیم

اگر در حالت یک بعدی دو تابع f و h به ترتیب B و A نمونه داشته باشند. تعداد صفرهایی که به هر یک اضافه می‌شود تا طول هر کدام برابر P شود:

$$P \geq A + B + 1$$

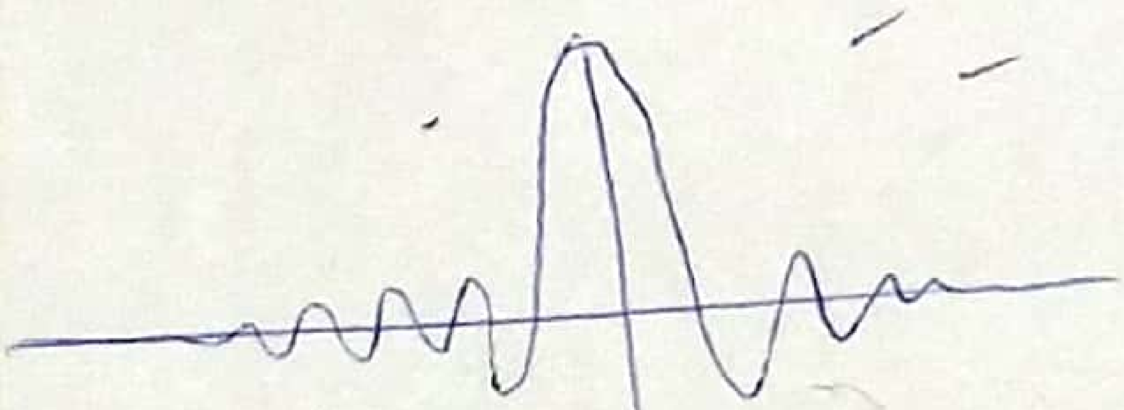
سوال مهم: دو تصویر در نظر بگیرید: $f_{A\times B}$, $h_{C\times D}$ اگر بخواهیم خطای پیچیده شدن در هم را
کانولوشن حلقوی از بین خواهد رفت اگر دو تابع به صورت زیر گسترش یابند:

$$f_p(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & 0 \le x \le A-1, \quad 0 \le y \le B-1 \\ 0 & A \le x \le P, \quad B \le y \le Q \end{cases}$$

$$h_p(x,y) = \begin{cases} h(x,y) & 0 \le x \le C-1, \quad 0 \le y \le D-1 \\ 0 & C \le x \le P, \quad D \le y \le Q \end{cases}$$

$$P \ge A + C + 1$$
$$Q \ge B + D + 1$$

اگر تابعی در انتها به صورت ناگهانی مقادیر غیرصفر داشته باشد، اضافه کردن صفر به آن معادل ضرب کردن آن در یک تابع Box است که باعث ایجاد فرکانس‌های بالا و ناخواسته در تبدیل فوریه آن می‌شود.



(می‌دانیم که تبدیل فوریه Box همان Sinc است)

به این پدیده نشت فرکانس Frequency Leakage گفته می‌شود.

نشت فرکانس به طور کامل قابل رفع نیست اما می‌توان اثر آن را با ضرب کردن تابع در تابعی به جای Box که به آرامی مقادیر را صفر می‌کند کاهش داد. به این کار Windowing یا Apodizing گفته می‌شود.

مبانی فیلتر کردن در حوزه فرکانس:

ویژگی‌های دیگر حوزه فرکانس:

از آنجایی که در رابطه تبدیل فوریه، هر مقدار $F(u,v)$ حاوی تمام مقادیر $f(x,y)$ است، بنابراین معمولاً غیرممکن است بتوان تناظر مستقیمی بین اجزای تصویر و تبدیل آن برقرار کرد. ولی تعدادی ارتباط کلی را می‌توان بیان کرد:

- فرکانس ارتباط مستقیم دارد با نرخ تغییرات مکانی
- جزء فرکانسی با حداقل تغییرات $(u = v = 0)$ ← میانگین درجه روشنایی تصویر: $F(0,0)$
- اجزای فرکانس پایین تصویر ← نواحی با حداقل تغییرات ← نواحی هموار ـ مثال ـ دشت
- اجزای فرکانس بالای تصویر ← 〃 〃 با میزان تغییرات بالا ← لبه‌ها ـ گوشه‌ها ـ نواحی شلوغ

فیلترینگ در حوزه فرکانس:

I

رابطه پایه:

$$g(x,y) = \mathrm{Real}\{\mathcal{F}^{-1}[H(u,v)\cdot F(u,v)]\}$$

IDFT

$H(u,v)$ → filter transfer function → متقارن حول مبدأ

$F(u,v)$ → DFT of $f(x,y)$ → after zero padding

یکی از ساده‌ترین توابع فیلتر H تابعی است که در مرکز صفر و در بقیه نقاط 1 است. ← برای حذف dc component (میانگین تصویر). → شکل ۴-۲۹ ص ۲۵۲

رابطه (I) ضرب توابع در حوزه فرکانس را نشان می‌دهد که معادل است با کانولوشن در حوزه مکان که اگر توابع در آن pad نشده باشند خطای wraparound error (درهم‌پیچیدگی) را خواهیم داشت.

برای padding تابع H به اندازه ابعاد تصویر pad شده ایجاد کرد. سپس IDFT آن را به حوزه مکان برده pad کرده و سپس DFT به حوزه فرکانس برگرداند. اما این کار باعث ایجاد ادواتی می‌شود که در شکل ۴-۳۳ نشان داده شده است.

نتیجه: نمی‌توان با زبان مکانی که تابع تبدیل حوزه فرکانس را به منظور رفع خطای درهم‌پیچیدگی pad کرد.

برای حل این مشکل تصویر اصلی را به اندازه P×Q pad می‌کنیم و سپس تابع تبدیل را به همان اندازه (P×Q) مستقیماً در حوزه فرکانس ایجاد می‌کنیم.

تحلیل زاویه فاز در رابطه (I):

با توجه به اینکه $F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$ رابطه I به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x,y) = \mathrm{Real}\{\mathcal{F}^{-1}[H(u,v)\cdot F(u,v)]\} = \mathrm{Real}\{\mathcal{F}^{-1}[H\cdot R + jH\cdot I]\}$$

$$tg^{-1}\left(\frac{H\cdot I}{H\cdot R}\right) =$$

فیلترهایی که به طور حقیقی و موهومی را به یک اندازه تحت تاثیر قرار دهند ولذا روی زاویه فاز تاثیری ندارند، فیلترهای بدون صفر فاز نامیده می‌شوند.

Zero-phase Shift

خلاصه‌ای از مراحل فیلترینگ در حوزه فرکانس:

۱- برای یک تصویر داده شده $f(x,y)$ با ابعاد $M \times N$، مقادیر $P=2M$ و $Q=2N$ را در نظر می‌گیریم.

۲- تصویر گسترش یافته $f_p(x,y)$ با ابعاد $P \times Q$ را با استفاده از روش‌های zero padding / mirror padding / replicate padding ایجاد می‌کنیم.

۳- $f_p(x,y)$ را در $(-1)^{x+y}$ ضرب می‌کنیم تا تبدیل فوریه در مرکز فرکانسی $P \times Q$ (در وسط) قرار بگیرد.

۴- تبدیل فوریه f_p را محاسبه می‌کنیم: $F(u,v)$

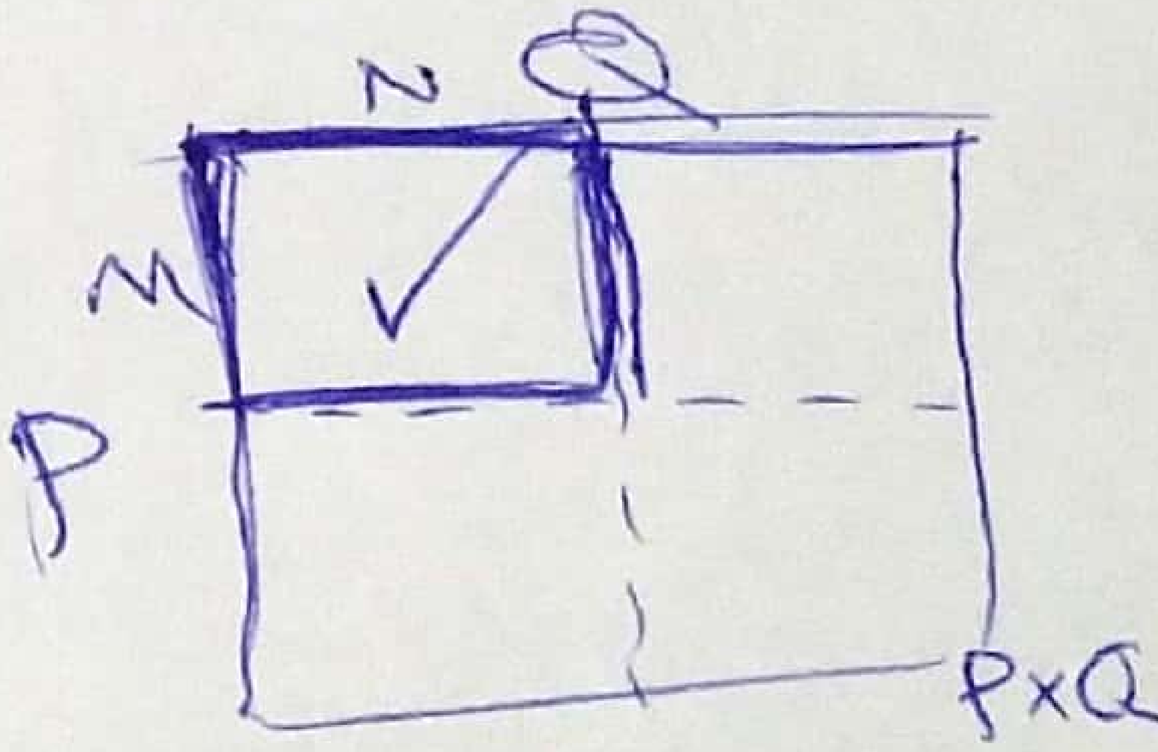
۵- یک تابع تبدیل فیلتر متقارن حقیقی $H(u,v)$ هم‌اندازه $F(u,v)$ ایجاد می‌کنیم (مرکز فیلتر در $(\frac{P}{2}, \frac{Q}{2})$)

۶- با ضرب نقطه‌ای $G(u,v) = H(u,v) F(u,v)$ را محاسبه می‌کنیم.

۷- تصویر فیلتر شده را با محاسبه تبدیل فوریه معکوس از G به دست می‌آوریم:

$$g_p(x,y) = \mathrm{real}\left[\mathcal{F}^{-1}\{G(u,v)\} \right] \cdot (-1)^{x+y}$$

$\rightarrow$ ابعاد تصویر $P \times Q$



۸- تصویر نهایی $g(x,y)$ را با استخراج فقط M سطر و N ستون اول از $g_p(x,y)$ به دست می‌آوریم.

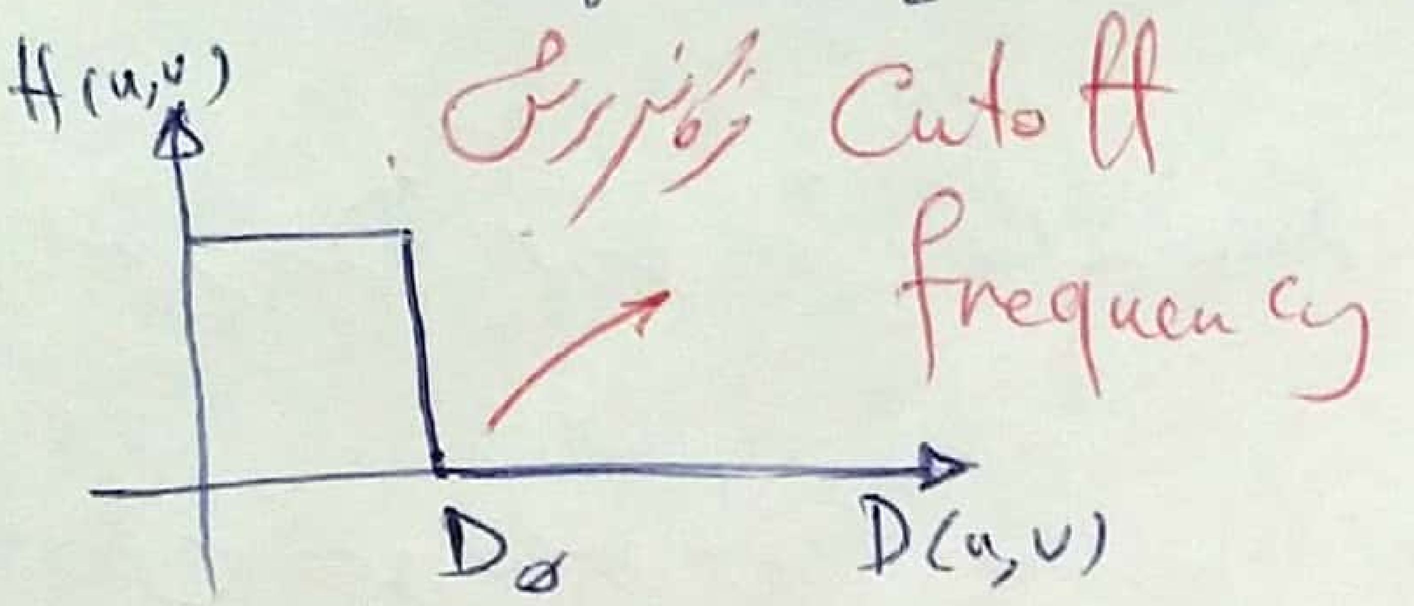
هموارسازی تصویر با استفاده از فیلترهای پایین‌گذر در حوزه فرکانس

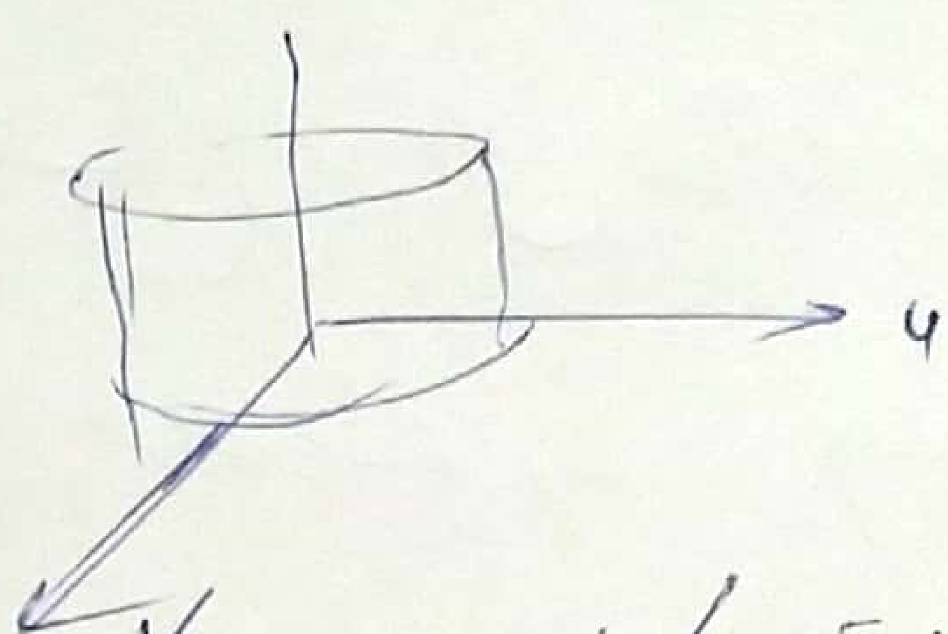
فیلترهای پایین‌گذر ایده‌آل:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ideal lowpass filters (ILPF)

$$D(u,v) = \sqrt{(u-\tfrac{P}{2})^2 + (v-\tfrac{Q}{2})^2} \rightsquigarrow$$ فاصله بین نقطه (u,v) و مرکز مربع $P \times Q$





این فیلتر ایده‌آل گفته می‌شود زیرا تمام فرکانس‌ها درون یک دایره با شعاع D_0 بدون تضعیف عبور داده می‌شوند و سایر فرکانس‌ها حذف می‌شوند.

~~فیلتر ایده‌آل~~ نقطه فیلتر پایین‌گذر به صورت تابعی از فرکانس برش مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. این فرکانس شعاع دایره فیلتر را مشخص می‌کند. مهم است که این دایره چند درصد از توان طیف فوریه را در خود جای دهد.

فرض کنید کل توان طیف فوریه تصویر را با P_T نشان دهیم:

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u,v)$$

دایره با مرکز $F(0,0)$ و شعاع D_0، α درصد از توان طیف را در خود جای می‌دهد:

$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u,v) / P_T \right]$$

به ازای u و vهای درون دایره به شعاع D_0 را شامل خواهد شد.

فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل برای α کمتر دچار پدیده مصنوعی شدن Ringing

دلیل این پدیده در حوزه مکان به سادگی قابل تحلیل است

بازسازی مکانی یک الگوی حلقوی است (شکل b-42-4) که اگر پروفایل افقی آن را رسم

کنیم یک تابع sinc است. عمل فیلتر کردن در حوزه فرکانس همان کانولوشن در حوزه مکان است.

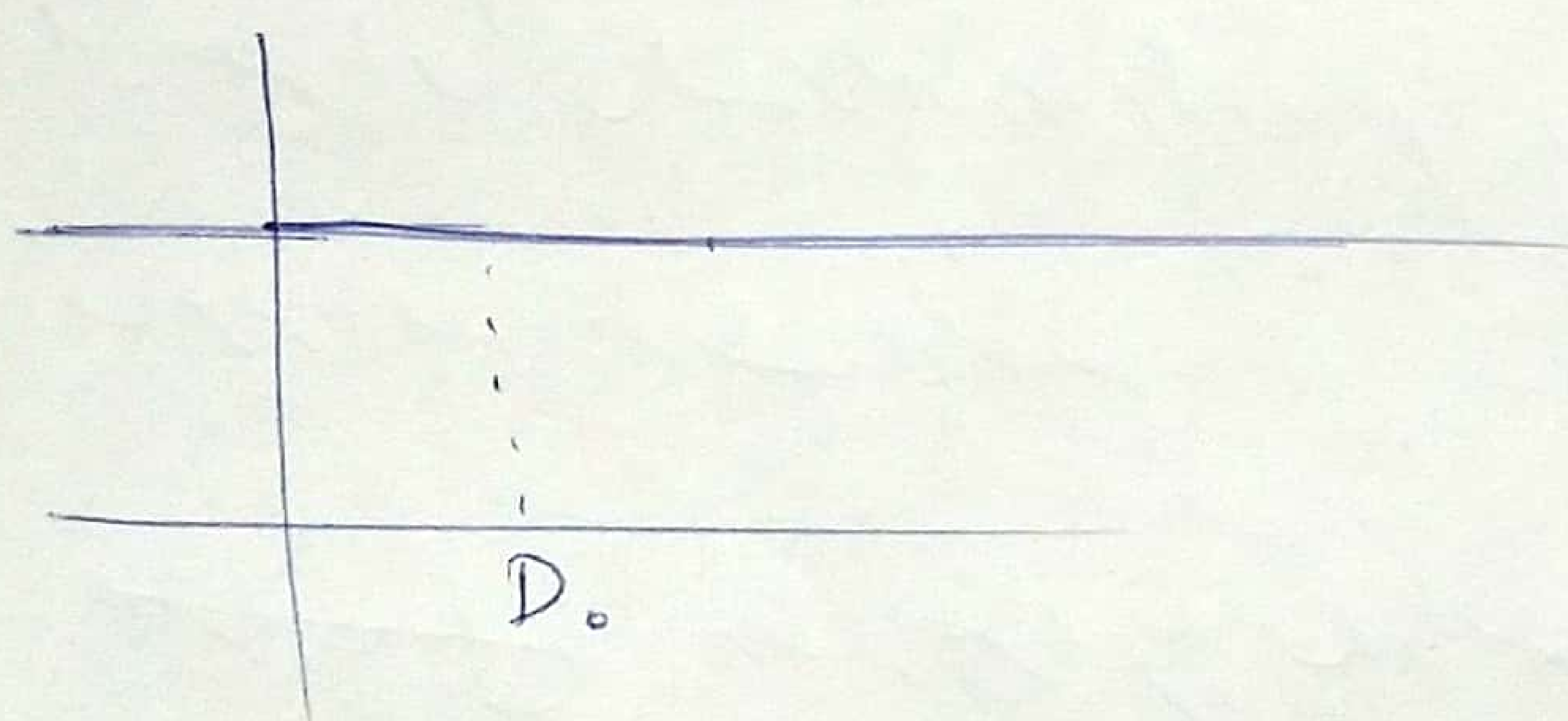
تصور کنید یک نقطه ضربه در تصویر اصلی را با یک sinc کانولوشن کنیم. حلقه اصلی sinc در این کانولوشن عامل

اصلی محوشدگی (همراه) تصویر است. درحالیکه دوایر دورتر از مرکز عامل اصلی پدیده Ringing هستند.

میزان گستردگی این sinc در حوزه مکان نسبت عکس دارد با مقدار D_0 در حوزه فرکانس.

هرچقدر D_0 بزرگتر باشد تابع sinc به سمت تابع ضربه تمایل پیدا میکند. در بزرگترین D_0، sinc

تبدیل به ضربه می‌شود که نه باعث Bluring خواهد شد و نه Ringing.



D_0

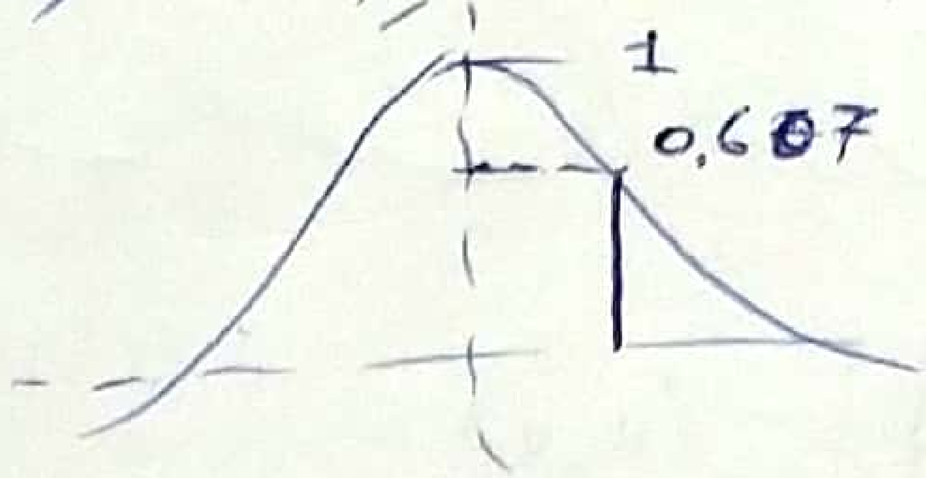
فیلترهای پایین گذر گاوسی: (GLPF)

شکل تابع مقابل را دارند:

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2\sigma^2}}$$

در این رابطه σ میزان گسترش نسبت به مرکز است و می‌توان آن را با D_0 جایگزین کرد.

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$



وقتی $D(u,v) = D_0$ است تابع تبدیل 0.607 مقدار ماکزیمم 1 می‌شود.

معادل حوزه مکان برای GLPF هم یک گاوسی است و لذا این فیلتر هیچ اثر حلقوی ایجاد نخواهد شد.

نکته: گستردگی گاوسی در حوزه فرکانس و مکان با هم نسبت عکس دارند. به عبارت دیگر یک گاوسی باریک در حوزه فرکانس معادل یک گاوسی پهن و گسترده در حوزه مکان است.

فیلتر پایین گذر باترورث Butterworth Lowpass filter (BLPF)

تابع تبدیل یک فیلتر BLPF با مرتبه n و فرکانس برش D_0 از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$

افزایش وضوح تصویر با استفاده از فیلترهای بالاگذر:

افزایش وضوح از طریق تقویت لبه ها و جزئیات تصویر که مرتبط با اجزای فرکانس بالای تصویر هستند با بکارگیری فیلترهای بالاگذر انجام می شود. این فیلترها اجزای فرکانس پایین تصویر را حذف یا تضعیف می کنند بدون آنکه به مولفه های فرکانس بالا آسیبی وارد شود.

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

تفاضل یک فیلتر پایین گذر از عدد 1 تابع تبدیل فیلتر بالاگذر متناظر را ایجاد می کند.

IHPF;
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

GHPF;
$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

BHPF;
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u,v)}\right]^{2n}}$$

بنابراین معادل هر یک از این فیلترها در حوزه مکان به صورت زیر است:

$$h_{HP}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[H_{HP}(u,v)] = \mathcal{F}^{-1}[1 - H_{LP}(u,v)] = \delta(x,y) - h_{LP}(x,y)$$

لاپلاسین در حوزه فرکانس:

یادآوری:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

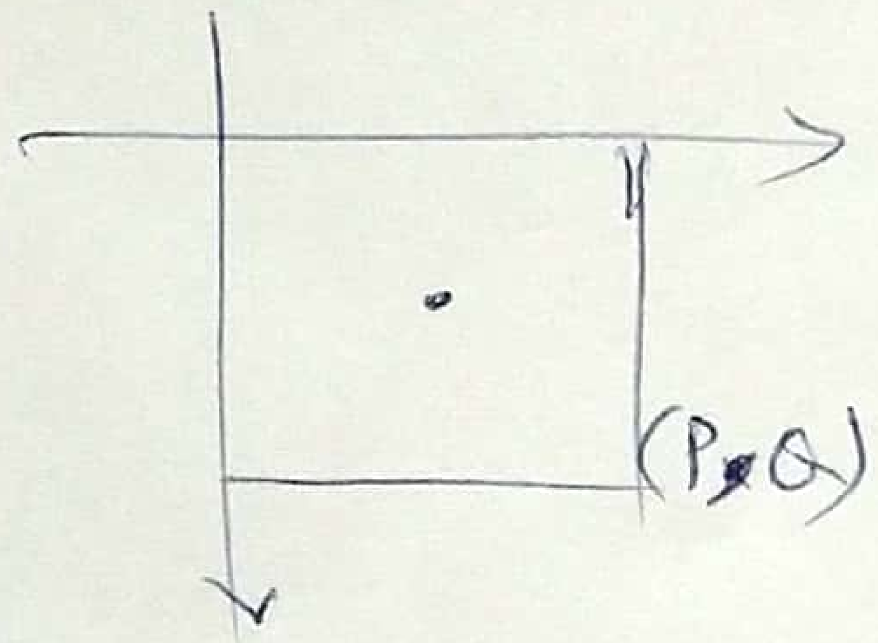
می‌دانیم: (ردیف ۱۲ جدول ۴-۴)

$$\frac{\partial^m f(t,z)}{\partial t^m} \Longleftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu,\nu)$$

$$\mathcal{F}\left[\nabla^2 f(x,y)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]$$

$$= (j2\pi u)^2 F(u,v) + (j2\pi v)^2 F(u,v)$$

$$= \underbrace{-4\pi^2(u^2+v^2)}_{H(u,v)} F(u,v)$$



تابع تبدیل فیلتر لاپلاسین در حوزه فرکانس نسبت به مرکز مستطیل فرکانسی:

$$H(u,v) = -4\pi^2\left[\left(u-\frac{P}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{Q}{2}\right)^2\right] = -4\pi^2 D^2(u,v)$$

با توجه به فصل ۳ - بهسازی تصویر با رابطه زیر انجام می‌شود:

$$\underline{g(x,y) = f(x,y) + c\nabla^2 f(x,y)} \; * \rightsquigarrow$$ ($c=-1$ زیرا $H(u,v)$ منفی است)

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{F(u,v) - H(u,v)F(u,v)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left[1-H(u,v)\right]F(u,v)\right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\underbrace{\left[1+4\pi^2 D^2(u,v)\right]}_{\text{تابع تبدیل بهسازی}} F(u,v)\right\}$$

به دلیل بزرگ شدن مقادیر و نیاز به scaling معمولاً از رابطه اخیر استفاده نمی‌شود. بلکه ابتدا لاپلاسین از رابطه

$$\nabla^2 f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left[H(u,v) \cdot F(u,v)\right]$$

در حوزه فرکانس محاسبه و سپس در حوزه مکان از رابطه * بهسازی انجام می‌شود.

Unsharp Masking در حوزه فرکانس :

یادآوری از فصل ۳ : مراحل انجام کار :

۱ـ مات کردن تصویر اصلی

۲ـ تفاضل تصویر مات از تصویر اصلی و ایجاد تصویر ماسک

۳ـ اضافه کردن تصویر ماسک به تصویر اصلی ؛

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{مات کردن}} \bar{f}(x,y)$$

$$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$

$$g(x,y) = f(x,y) + k\, g_{mask}(x,y)$$

با استفاده از روش های حوزه فرکانس :

$$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - f_{LP}(x,y)$$

$$f_{LP}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left[H_{LP}(u,v)\, F(u,v)\right]$$

$$g(x,y) = f(x,y) + k\, g_{mask} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(1 + k\left[1 - H_{LP}(u,v)\right]\right) F(u,v)\right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\underbrace{\left[\overset{k_1}{1} + \overset{k_2}{k}\, H_{HP}(u,v)\right]}_{\substack{\text{High-Frequency-emphasis filter Transfer function} \\ H(u,v)}} F(u,v)\right\}$$